

А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

7-9

А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ
7–9 классы

Учебник

Допущено Министерством просвещения
Российской Федерации

11-е издание, стереотипное

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2022

УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
П43

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 446 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 133 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 123-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Погорелов, Алексей Васильевич.
П43 Геометрия. 7—9 классы: учебник : издание в pdf-формате / А. В. Погорелов. — 11-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 239, [1] с. : ил.
ISBN 978-5-09-101284-2 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-087755-8 (печ. изд.).
Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. В учебнике выделены задачи повышенной трудности, пункты «Замечательные точки в треугольнике»; «Геометрические преобразования на практике»; «Измерение углов, связанных с окружностью» и др. усиливают практическую направленность курса геометрии. Большое количество фотографий реальных объектов позволяет увидеть геометрические фигуры в окружающем мире.
УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

Учебное издание

***Погорелов** Алексей Васильевич*

ГЕОМЕТРИЯ
7—9 классы

Учебник

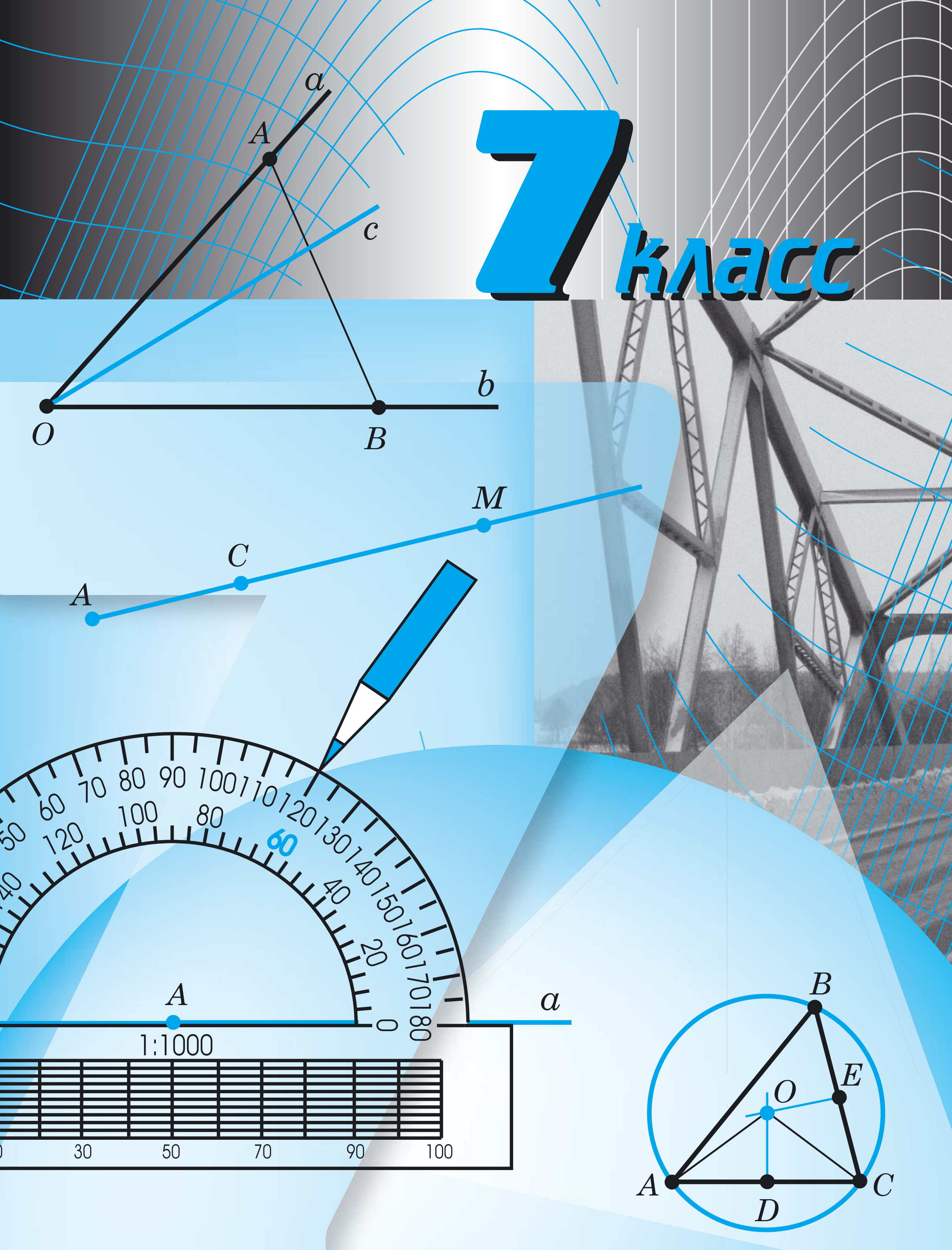
Центр математики
Ответственный за выпуск *Ю. С. Голубева*, редакторы *И. В. Комарова*, *И. В. Рекман*, художники *Н. Ю. Панкевич*, *Т. В. Делягина*, художественный редактор *Т. В. Глушкова*, компьютерная вёрстка и техническое редактирование *О. В. Крупенко*, *О. А. Федотовой*, корректор *А. В. Рудакова*

Подписано в печать 12.08.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура Школьная.
Уч.-изд. л. 14,77. Усл. печ. л. 17,55. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.

ISBN 978-5-09-101284-2 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-087755-8 (печ. изд.)


7 класс
a
A
c
b
O
B
M
C
A
A
a
1:1000
B
E
O
A
D
C



Основные свойства простейших геометрических фигур

1 Геометрические фигуры

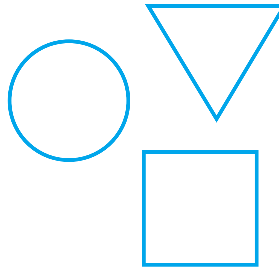


Рис. 1

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие». Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.

Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность (рис. 1).

Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рисунке 2 фигура вверху состоит из треугольника и трёх квадратов, а фигура внизу состоит из окружности и частей окружности. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

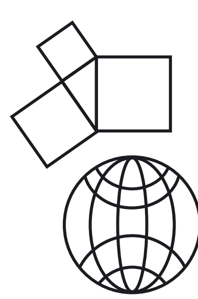
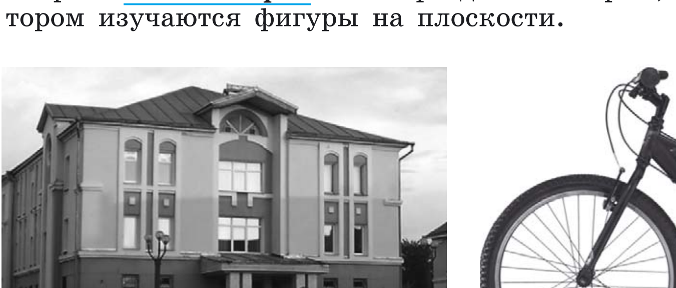


Рис. 2

Геометрия широко применяется на практике. Её надо знать и рабочему, и инженеру, и архитектору, и художнику. Одним словом, геометрию надо знать всем.

Геометрия, которая изучается в школе, называется евклидовой по имени Евклида, создавшего руководство по математике под названием «Начала». В течение длительного времени геометрию изучали по этой книге.

Мы начнём изучение геометрии с планиметрии. **Планиметрия** — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.





2 Точка и прямая

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются **точка** и **прямая**. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, ... На рисунке 3 вы видите точку A и прямую a.



Евклид — древнегреческий учёный (III в. до н. э.)

Прямая бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть прямой, но представляем её себе неограниченно продолженной в обе стороны.

Посмотрите на рисунок 4. Вы видите прямые a, b и точки A, B, C. Точки A и C лежат на прямой a. Можно сказать также, что точки A и C принадлежат прямой a или что прямая a проходит через точки A и C.

Точка B лежит на прямой b. Она не лежит на прямой a. Точка C лежит и на прямой a, и на прямой b. Прямые a и b пересекаются в точке C. Точка C является точкой пересечения прямых a и b.

На рисунке 5 вы видите, как с помощью линейки строится прямая, проходящая через две заданные точки A и B.

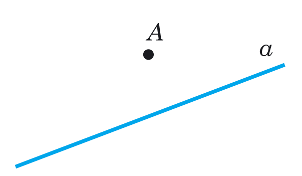


Рис. 3

Основными свойствами принадлежности точек и прямых на плоскости мы будем называть следующие свойства:

I

Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 4 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC.

Задача (3)[1]. Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.

Решение.

Если бы две прямые имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две пря-

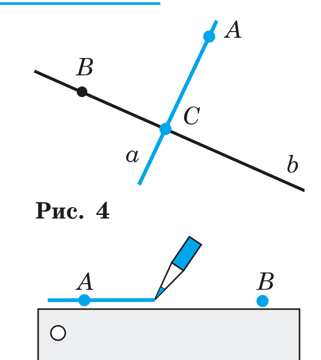


Рис. 4

Рис. 5

[1] Число в скобках указывает номера задач, приведённых в конце параграфа.

мые. А это невозможно, так как через две точки можно провести только одну прямую. Значит, две прямые не могут иметь две точки пересечения.

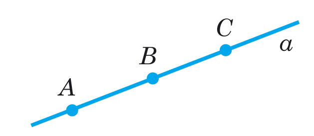


Рис. 6

3 Отрезок

Посмотрите на рисунок 6. Вы видите прямую *a* и три точки *A*, *B*, *C* на этой прямой. Точка *B* **лежит между** точками *A* и *C*, она **разделяет** точки *A* и *C*. Можно также сказать, что точки *A* и *C* лежат **по разные стороны** от точки *B*. Точки *B* и *C* лежат **по одну сторону** от точки *A*, они не разделяются точкой *A*. Точки *A* и *B* лежат по одну сторону от точки *C*.

Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками. Эти точки называются **концами отрезка**. Отрезок обозначается указанием его концов. Когда говорят или пишут: «отрезок *AB*», то подразумевают отрезок с концами в точках *A* и *B*.

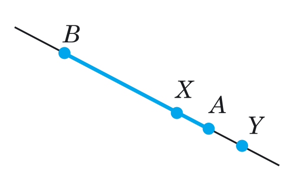


Рис. 7

На рисунке 7 вы видите отрезок *AB*. Он является частью прямой *AB*. Эта часть прямой выделена коричневой линией. Точка *X* прямой лежит между точками *A* и *B*, поэтому она принадлежит отрезку *AB*. Точка *Y* не лежит между точками *A* и *B*, поэтому она не принадлежит отрезку *AB*.

Основным свойством расположения точек на прямой будем называть следующее свойство:

II

Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4 Измерение отрезков

Для измерения отрезков применяются разные измерительные инструменты. Простейшим таким инструментом является линейка с делениями на ней. На рисунке 8 отрезок *AB* равен 5 см, отре-

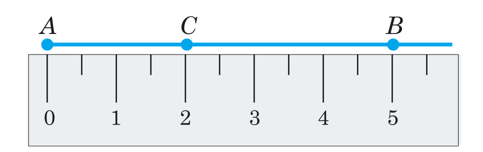




Рис. 8

зок AC равен 2 см, а отрезок BC равен 3 см. Длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

Основными свойствами измерения отрезков мы будем называть следующие свойства:

III

Каждый отрезок имеет определённую длину, бо́льшую нуля.
Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Это значит, что если на отрезке AB взять любую точку C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Длину отрезка AB называют также **расстоянием** между точками A и B.

Задача (9). Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?



Решение.

Если точка A лежит между точками B и C, то по свойству измерения отрезков должно быть $AB + AC = BC$. Но $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Значит, точка A не лежит между точками B и C.

Если точка C лежит между точками A и B, то должно быть $AC + BC = AB$. Но $7{,}5 + 3{,}2 \neq 4{,}3$. Значит, точка C не лежит между точками A и B.

Из трёх точек A, B, C на прямой одна точка лежит между двумя другими. Значит, этой точкой является B.

5 Полуплоскости

Посмотрите на рисунок 9. Прямая a **разбивает** плоскость на две полуплоскости. Это разбиение обладает следующим свойством. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

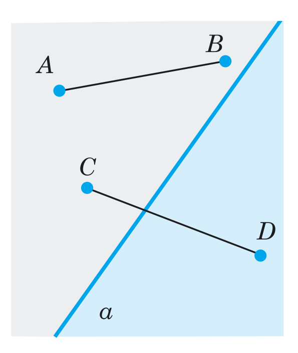


Рис. 9

На рисунке 9 точки A и B лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Поэтому отрезок AB не пересекает пря-

мую a. Точки C и D лежат в разных полуплоскостях. Поэтому отрезок CD пересекает прямую a.

Основным свойством расположения точек относительно прямой на плоскости мы будем называть следующее свойство:

IV

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Задача (17). Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает её. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.

Решение.

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 10). Точка A принадлежит одной из них. Отрезок AC не пересекает прямую. Значит, точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A.

Отрезок AB пересекает прямую. Значит, точка B лежит в другой полуплоскости.

Таким образом, точки B и C лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок BC пересекает нашу прямую.

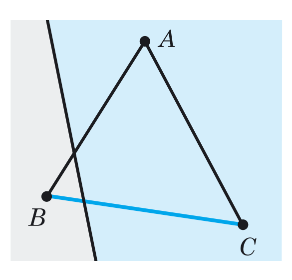


Рис. 10

6 Полупрямая

Задача (20). Даны прямая a и точки A, X, Y, Z на этой прямой (рис. 11). Известно, что точки X и Y лежат по одну сторону от точки A, точки X и Z тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки Y и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны? Объясните ответ.

Решение.

Проведём через точку A какую-нибудь прямую b, отличную от a. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Одной из них принадлежит точка X. В той же полуплоскости лежат точки Y и Z, потому что отрезки XY и XZ не пересекают прямую b. Так как точки Y и Z лежат в одной полуплоскости, то отрезок YZ не пересекает прямую b, а значит, не содержит точку A. То есть точки Y и Z лежат по одну сторону от точки A.

Полупрямой, или **лучом**, называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точ-



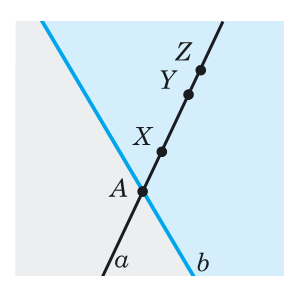
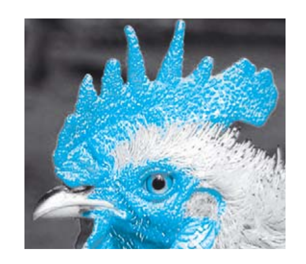


Рис. 11

ки. Эта точка называется **начальной точкой** полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются **дополнительными**.

Полупрямые, так же как и прямые, обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать полупрямую двумя точками: начальной и ещё какой-нибудь точкой, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, полупрямую, которая выделена коричневой линией на рисунке 12, можно обозначить AB.



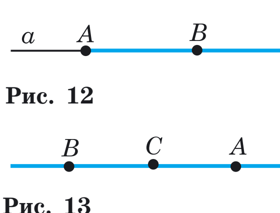


Задача (22). На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA и CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

Решение (рис. 13).

Данные полупрямые имеют начальной точкой либо точку A, либо точку C.

Рассмотрим сначала полупрямые с начальной точкой A (полупрямые AB и AC). Точка C лежит между точками A и B, так как по условию задачи она принадлежит отрезку AB. Значит, точка A не лежит между точками B и C, т. е. точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Поэтому полупрямые AB и AC совпадающие.



Рассмотрим теперь полупрямые с начальной точкой C (полупрямые CA и CB). Точка C разделяет точки A и B. Поэтому точки A и B не могут принадлежать одной полупрямой, а значит, полупрямые CA и CB дополнительные.

7 Угол

Углом называется фигура, которая состоит из точки — **вершины угла** — и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки, — **сторон угла.**

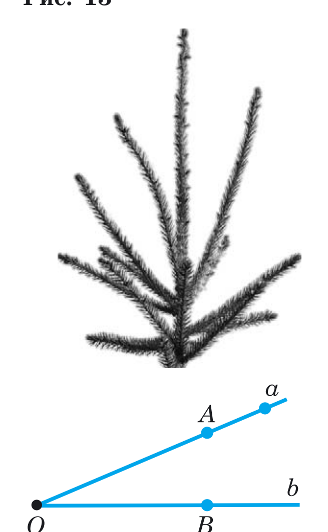


Рис. 14

На рисунке 14 вы видите угол с вершиной O и сторонами a, b. Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трёх точек: вершины и двух точек на сторонах угла. Слово «угол» иногда заменяют знаком $\angle$. Угол на рисунке 14 можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. В третьем способе буква угла, обозначающая вершину, ставится посередине.

Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется **развёрнутым**. На рисунке 15 вы видите развёрнутый угол с вершиной O и сторонами OA и OB.

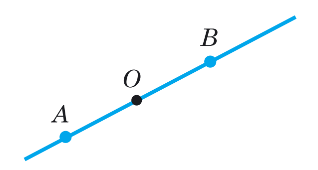


Рис. 15

Мы будем говорить, что луч **проходит между** сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. На рисунке 16 луч c проходит между сторонами угла (ab), так как он исходит из вершины угла (ab) и пересекает отрезок AB с концами на его сторонах.

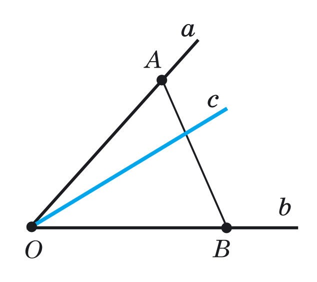


Рис. 16

В случае развёрнутого угла мы считаем, что любой луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Углы измеряются в градусах при помощи транспортира. На рисунке 17 угол (ab) равен $120°$. Полупрямая c проходит между сторонами угла (ab). Угол (ac) равен $90°$, а угол (bc) равен $30°$. Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

Основными свойствами измерения углов мы будем называть следующие свойства:

V

Каждый угол имеет определённую градусную меру, бóльшую нуля.
Развёрнутый угол равен $180°$.
Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Это значит, что если луч c проходит между сторонами угла (ab), то угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

Задача (25). Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$?

Решение.

Если луч c проходит между сторонами угла (ab), то по свойству измерения углов должно быть:

$$\angle(ac) + \angle(bc) = \angle(ab).$$

Но $30° + 80° \neq 50°$.

Значит, луч c не может проходить между сторонами угла (ab).

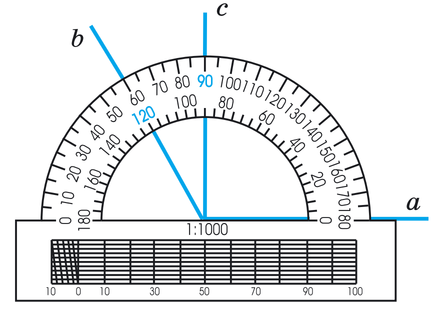


Рис. 17

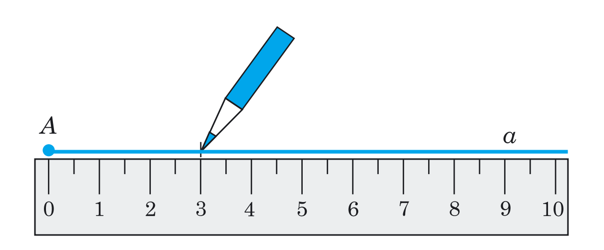


Рис. 18

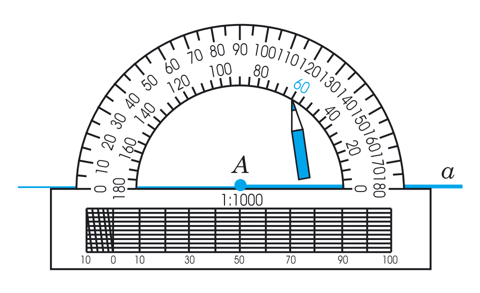


Рис. 19

8 Откладывание отрезков и углов

На рисунке 18 показано, как с помощью линейки на полупрямой *a* с начальной точкой *A* можно отложить отрезок данной длины (3 см).



Посмотрите на рисунок 19. Полупрямая *a*, продолженная за начальную точку *A*, разбивает плоскость на две полуплоскости. На рисунке показано, как с помощью транспортира отложить от полупрямой *a* в верхнюю полуплоскость угол с данной градусной мерой (60°).

Основными свойствами откладывания отрезков и углов мы будем называть следующие свойства:

VI, VII

На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

Задача (30). На луче *AB* отложен отрезок *AC*, меньший отрезка *AB*. Какая из трёх точек *A*, *B*, *C* лежит между двумя другими? Объясните ответ.

Решение (рис. 20).

Так как точки *B* и *C* лежат на одной полупрямой с начальной точкой *A*, то они не разделяются точкой *A*, т. е. точка *A* не лежит между точками *B* и *C*.

Может ли точка *B* лежать между точками *A* и *C*? Если бы она лежала между точками *A* и *C*, то было бы $AB + BC = AC$. Но это невозможно, так как по условию отрезок *AC* меньше отрезка *AB*. Значит, точка *B* не лежит между точками *A* и *C*.

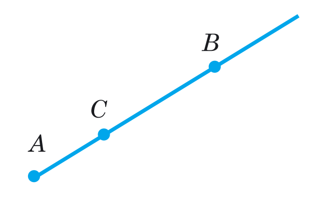


Рис. 20

Из трёх точек A, B, C одна лежит между двумя другими. Поэтому точка C лежит между точками A и B.

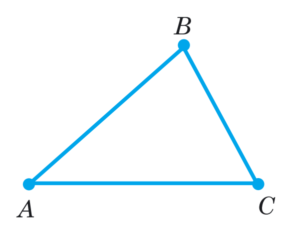


Рис. 21

9 Треугольник

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются **вершинами** треугольника, а отрезки — **сторонами**.

На рисунке 21 вы видите треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC. Треугольник обозначается указанием его вершин. Вместо слова «треугольник» иногда употребляют знак $\triangle$. Например, треугольник на рисунке 21 обозначается так: $\triangle ABC$.



Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

Два **отрезка** называются **равными**, если они имеют одинаковую длину. Два **угла** называются **равными**, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах.

Треугольники называются **равными**, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

На рисунке 22 вы видите два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. У них

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

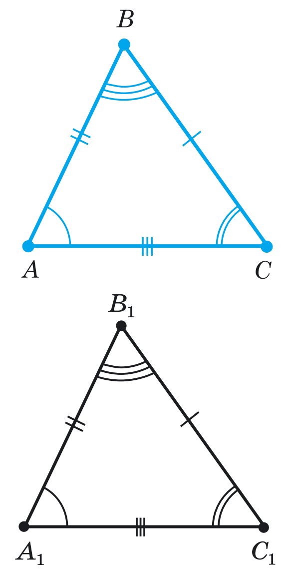


Рис. 22

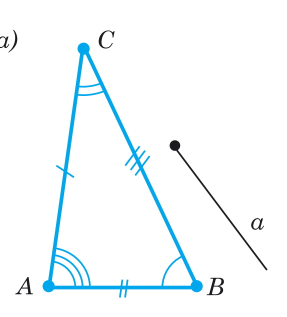
На чертеже равные отрезки обычно отмечают одной, двумя или тремя чёрточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

Для обозначения равенства треугольников используется обычный знак равенства: =. Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читается так: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$». При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... А равенство $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означает уже совсем другое: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

Задача (38). Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен 90°. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.

Решение.

Так как треугольники ABC и PQR равны, то у них $AB = PQ$, $\angle C = \angle R$. Значит, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.



10 Существование треугольника, равного данному

Пусть мы имеем треугольник ABC и луч a (рис. 23, a). Переместим треугольник ABC так, чтобы его вершина A совместилась с началом луча a, вершина B попала на луч a, а вершина C оказалась в заданной полуплоскости относительно луча a и его продолжения. Вершины нашего треугольника в этом новом положении обозначим A_1, B_1, C_1 (рис. 23, *б*). *Треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC.*

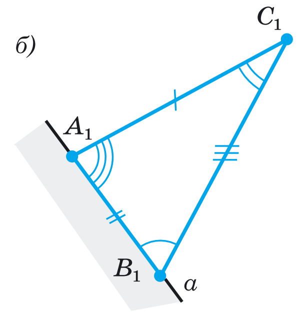


Рис. 23

Существование треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC и расположенного указанным образом относительно заданного луча a, мы относим к числу **основных свойств** простейших фигур. Это свойство мы будем формулировать так:

VIII

Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

11 Параллельные прямые

Две прямые называются **параллельными**, если они не пересекаются.

На рисунке 24 показано, как с помощью угольника и линейки провести через данную точку B прямую b, параллельную данной прямой a.

Для обозначения параллельности прямых используется знак ∥. Запись $a \parallel b$ читается: «Прямая a параллельна прямой b».

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельных) состоит в следующем:

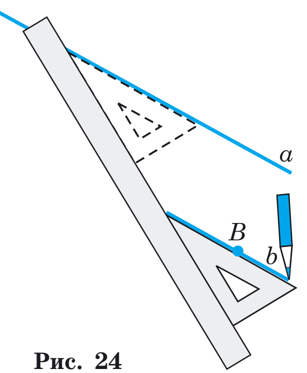


Рис. 24







IX

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Задача (41). Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.

Решение.

Пусть a и b — параллельные прямые, и пусть прямая c пересекает прямую a в точке A (рис. 25). Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку A проходили бы две прямые, не пересекающие прямую b: прямая a и прямая c. Но по свойству параллельных прямых это невозможно. Значит, прямая c, пересекая прямую a, должна пересекать и параллельную ей прямую b.

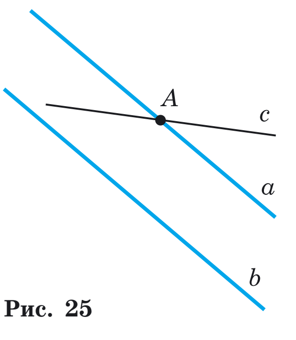


Рис. 25

12 Теоремы и доказательства

Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путём рассуждения. Это рассуждение называется **доказательством**. А само утверждение, которое доказывается, называется **теоремой**. Приведём пример.

Теорема 1.1

Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.

Доказательство.

Пусть прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его сто-

рону AB (рис. 26). Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок AB пересекает прямую a. Точка C лежит в одной из этих полуплоскостей.

Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, то отрезок AC не пересекает прямую a, а отрезок BC пересекает эту прямую (рис. 26, *а*). Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то отрезок AC пересекает прямую a, а отрезок BC не пересекает её (рис. 26, *б*).

В обоих случаях прямая a пересекает только один из отрезков AC или BC. Вот и всё доказательство.

Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется **условием** теоремы. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется **заключением** теоремы.

Условие теоремы 1.1 состоит в том, что прямая не проходит ни через одну вершину треугольника и пересекает одну из его сторон. Заключение теоремы состоит в том, что эта прямая пересекает только одну из двух других сторон треугольника.

13 Аксиомы

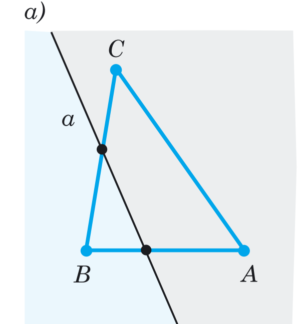
Утверждения, содержащиеся в формулировках основных свойств простейших фигур, не доказываются и называются **аксиомами**. Слово «аксиома» происходит от греческого слова «аксиос» и означает «утверждение, не вызывающее сомнений».

При доказательстве теорем разрешается пользоваться основными свойствами простейших фигур, т. е. аксиомами, а также свойствами, уже доказанными, т. е. доказанными теоремами. Никакими другими свойствами фигур, даже если они нам кажутся очевидными, пользоваться нельзя.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что мы выражаем словами. Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее.

В геометрии наряду с такими словами, как «аксиома» и «теорема», используется также слово «определение». Дать **определение** чему-либо — значит объяснить, что это такое.

а)



б)

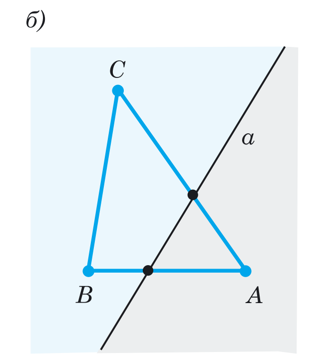


Рис. 26



Например, говорят: «Дайте определение треугольника». На это отвечают: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки».

Другой пример: «Дайте определение параллельных прямых». Отвечаем: «Прямые называются параллельными, если они не пересекаются». Вы уже знаете определения равенства отрезков, равенства углов и равенства треугольников.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры геометрических фигур.
2. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
3. Как обозначаются точки и прямые?
4. Сформулируйте основные свойства принадлежности точек и прямых.
5. Объясните, что такое отрезок с концами в данных точках.
6. Сформулируйте основное свойство расположения точек на прямой.
7. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.
8. Что называется расстоянием между двумя данными точками?
9. Какими свойствами обладает разбиение плоскости на две полуплоскости?
10. Сформулируйте основное свойство расположения точек относительно прямой на плоскости.
11. Что такое полупрямая, или луч? Какие полупрямые называются дополнительными?
12. Как обозначаются полупрямые?
13. Какая фигура называется углом?
14. Как обозначается угол?
15. Какой угол называется развёрнутым?
16. Объясните, что означает выражение: «Полупрямая проходит между сторонами угла».
17. В каких единицах измеряются углы и с помощью какого инструмента? Объясните, как проводится измерение.
18. Сформулируйте основные свойства измерения углов.
19. Сформулируйте основные свойства откладывания отрезков и углов.
20. Что такое треугольник?
21. Что такое угол треугольника при данной вершине?
22. Какие отрезки называются равными?
23. Какие углы называются равными?
24. Какие треугольники называются равными?
25. Как на рисунке отмечаются у равных треугольников соответствующие стороны и углы?

26. Объясните по рисунку 23 существование треугольника, равного данному.

27. Какие прямые называются параллельными? Какой знак используется для обозначения параллельности прямых?

28. Сформулируйте основное свойство параллельных прямых.

29. Приведите пример теоремы.

30. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 4—15)? Приведите другие примеры геометрических фигур.

Задачи[1]

Пункт 2

1. 1) Проведите прямую. Отметьте какую-нибудь точку A, лежащую на прямой, и точку B, не лежащую на прямой.
2) Проведите две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте точку C пересечения прямых; точку A на прямой a, не лежащую на прямой b; точку D, не лежащую ни на одной из прямых a и b.

2. Отметьте на листе бумаги две точки. Проведите через них от руки прямую. С помощью линейки проверьте правильность построения.

3. Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.

4. Для проверки правильности линейки применяют такой способ. Через две точки с помощью линейки проводят линию (рис. 27). Затем линейку переворачивают и через те же точки снова проводят линию. Если линии не совпадают, то линейка неправильная. На каком свойстве прямых основан этот способ проверки правильности линейки?

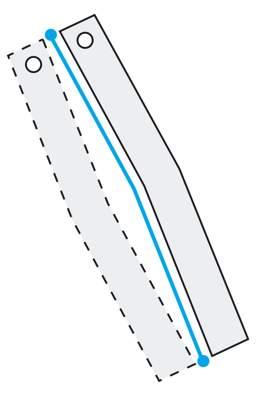


Рис. 27

Пункт 3

5. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь точку C так, чтобы точка A лежала между точками B и C.

---

[1] Многие задачи настоящего учебника взяты из школьных учебников и задачников прошлых лет, в особенности из «Геометрии» А. П. Киселёва и «Сборника задач по геометрии» Н. А. Рыбкина.

Задачи распределены по пунктам так, чтобы при изучении каждого нового пункта учебника в решениях задач использовался теоретический материал этого пункта и, возможно, предыдущих пунктов.

6. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь какую-нибудь точку C отрезка AB.

Пункт 4

7. Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м.
8. Отметьте на прямой две точки. Отметьте на глаз середину отрезка, соединяющего эти точки. Проверьте правильность построения измерениями с помощью линейки.
9. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?
10. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC = 5$ см, $BC = 7$ см? Объясните ответ.
11. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Может ли точка B разделить точки A и C, если $AC = 7$ м, $BC = 7{,}6$ м? Объясните ответ.
12. Могут ли точки A, B и C лежать на одной прямой, если $AB = 1{,}8$ м, $AC = 1{,}3$ м, $BC = 3$ м? Объясните ответ.
13. Могут ли три точки A, B, C лежать на одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC? Объясните ответ.
14. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ м, $AC = 3{,}2$ м. Сколько решений имеет задача?
15. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длину отрезков AC и BC, если: 1) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; 2) отрезок AC в 2 раза длиннее отрезка BC; 3) точка C — середина отрезка AB; 4) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

Пункт 5

16. Проведите прямую и отметьте какую-нибудь точку A, не лежащую на этой прямой. Отметьте теперь две точки B и C так, чтобы отрезок AB пересекал прямую, а отрезок BC не пересекал её.
17. Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает её. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.
18. Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли прямую отрезок AD, если: 1) отрезки

AB, BC и CD пересекают прямую; 2) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; 3) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; 4) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; 5) отрезки AB, BC, CD не пересекают прямую; 6) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Объясните ответ.

19. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой, а две точки — в другой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков пересекает прямую? Объясните ответ.

Пункт 6

20. Даны прямая a и точки A, X, Y, Z на этой прямой (рис. 11). Известно, что точки X и Y лежат по одну сторону от точки A, точки X и Z тоже лежат по одну сторону от точки A. Как расположены точки Y и Z относительно точки A: по одну сторону или по разные стороны? Объясните ответ.

21. Отметьте две точки A и B. Проведите полупрямую AB.

22. На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA, CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

Пункт 7

23. Проведите из одной точки три произвольных луча. Определите на глаз углы, образуемые этими лучами. Проверьте ваши ответы, измеряя углы транспортиром. Повторите упражнение.

24. Луч a проходит между сторонами угла (cd). Найдите угол (cd), если: 1) $\angle(ac) = 35^\circ$, $\angle(ad) = 75^\circ$; 2) $\angle(ac) = 57^\circ$, $\angle(ad) = 62^\circ$; 3) $\angle(ac) = 94^\circ$, $\angle(ad) = 85^\circ$.

25. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если: 1) $\angle(ac) = 30^\circ$, $\angle(cb) = 80^\circ$, $\angle(ab) = 50^\circ$; 2) $\angle(ac) = 100^\circ$, $\angle(cb) = 90^\circ$; 3) угол (ac) больше угла (ab)?

26. Между сторонами угла (ab), равного 60°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если: 1) угол (ac) на 30° больше угла (bc); 2) угол (ac) в 2 раза больше угла (bc); 3) луч c делит угол (ab) пополам; 4) градусные меры углов (ac) и (bc) относятся как 2:3.

Пункт 8

27. Проведите прямую. Отметьте на ней какую-нибудь точку A. Затем отметьте на глаз точку B этой прямой так, чтобы $AB = 5$ см. Проверьте точность построения точки B линейкой. Повторите упражнение для: 1) $AB = 3$ см; 2) $AB = 7$ см; 3) $AB = 10$ см.

28. Постройте на глаз углы 30°, 45°, 60°, 90°. Проверьте точность построения транспортиром. Повторите задание.

29. Существует ли на полупрямой AB такая точка X, отличная от B, что $AX = AB$? Объясните ответ.
30. На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из трёх точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ.
31. На луче AB отмечена точка C. Найдите длину отрезка BC, если: 1) $AB = 1{,}5$ м, $AC = 0{,}3$ м; 2) $AB = 2$ см, $AC = 4{,}4$ см.

Пункт 9

32. Постройте на глаз треугольник с равными сторонами (равносторонний треугольник). Проверьте точность построения измерением сторон.
33. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Чему равна сторона AB треугольника, если $AD = 5$ см, а $BD = 6$ см?
34. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Найдите угол C треугольника, если $\angle ACD = 30°$, а $\angle BCD = 70°$.
35. Начертите какой-нибудь треугольник. Постройте от руки на глаз равный ему треугольник. Проверьте правильность построения, измеряя соответствующие углы и стороны. Повторите упражнение.
36. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника PQR. Объясните ответ.
37. Треугольники ABC и PQR равны. Углы второго треугольника известны: $\angle P = 40°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$. Найдите углы треугольника ABC.
38. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен $90°$. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.
39. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $ZX = 7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

Пункт 10

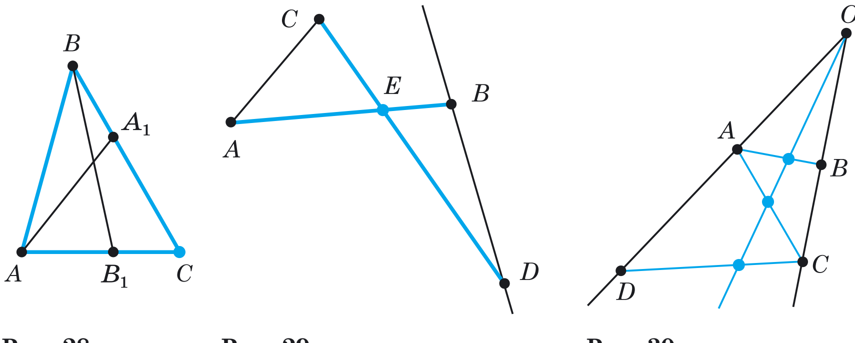
40. Дан треугольник ABC. Существует ли другой, равный ему треугольник ABD?

Пункт 11

41. Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.
42. Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли провести третью прямую, параллельную каждой из двух данных?

Пункт 12

43. Может ли прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекать каждую его сторону? Почему?



44[1]**.** Даны четыре точки A, B, C и D. Известно, что точки A, B, C лежат на одной прямой и точки B, C, D также лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

45. Даны четыре прямые a, b, c и d. Известно, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d также пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре данные прямые проходят через одну точку.

46. Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

47. Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC — точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются (рис. 28).

48. Отрезки AB и CD, не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке E. Докажите, что отрезок AC не пересекает прямую BD (рис. 29).

■ Пункт 13

49. Докажите, что если луч, исходящий из вершины угла, пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, то он пересекает: 1) отрезок AC с концами на сторонах угла; 2) любой отрезок CD с концами на сторонах угла (рис. 30).

50. Докажите, что две прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

51. Точки A и C принадлежат прямой a. На полупрямой CA отложен отрезок CB, больший отрезка CA. 1) Какая из трёх точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ. 2) Докажите, что точка A разбивает прямую a на две полупрямые AB и AC.

---

[1] Цветом отмечены задачи повышенной трудности.



§ 2 Смежные и вертикальные углы

14 Смежные углы



Определение. Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

На рисунке 31 углы (a_1b) и (a_2b) смежные. У них сторона b общая, а стороны a_1 и a_2 являются дополнительными полупрямыми.

Пусть C — точка на прямой AB, лежащая между точками A и B, а D — точка, не лежащая на прямой AB (рис. 32). Тогда углы BCD и ACD смежные. У них сторона CD общая. Стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми прямой AB, так как точки A и B этих полупрямых разделяются начальной точкой C.

Теорема 2.1

Сумма смежных углов равна 180°.

Доказательство.

Пусть $\angle(a_1b)$ и $\angle(a_2b)$ — данные смежные углы (см. рис. 31). Луч b проходит между сторонами a_1 и a_2 развёрнутого угла. Поэтому сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развёрнутому углу, т. е. 180°. Теорема доказана.

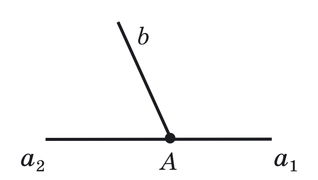


Рис. 31

Из теоремы 2.1 следует, что:

1. **Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.**
2. **Если угол не развёрнутый, то его градусная мера меньше 180°.**



Задача (3). Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Решение.

Обозначим градусную меру меньшего из углов через x. Тогда градусная мера большего угла будет $2x$. Сумма углов равна 180°. Итак, $x + 2x = 180$, $3x = 180$. Отсюда $x = 60$. Значит, наши смежные углы равны 60° и 120°.

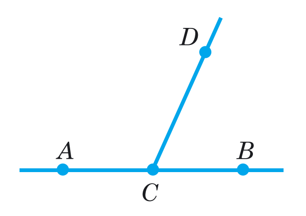


Рис. 32

Угол, равный 90°, называется **прямым углом**. Из теоремы о сумме смежных углов следует, что

угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Угол, меньший 90°, называется **острым углом**. Угол, больший 90° и меньший 180°, называется **тупым**.

Так как сумма смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым углом, тупой, а угол, смежный с тупым углом, острый. На рисунке 33 изображены три вида углов.

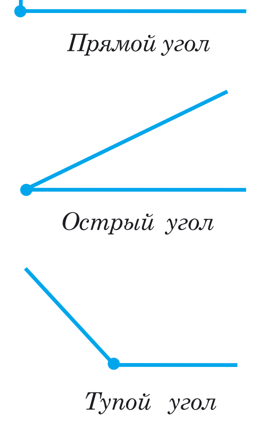


Рис. 33

15 Вертикальные углы

Определение. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

На рисунке 34 углы (a_1b_1) и (a_2b_2) вертикальные. Стороны a_2 и b_2 второго угла — дополнительные полупрямые сторон a_1 и b_1 первого угла.

Теорема 2.2

Вертикальные углы равны.

Доказательство.

Пусть (a_1b_1) и (a_2b_2) — данные вертикальные углы (см. рис. 34). Угол (a_1b_2) является смежным с углом (a_1b_1) и с углом (a_2b_2). Отсюда по теореме о сумме смежных углов заключаем, что каждый из углов (a_1b_1) и (a_2b_2) дополняет угол (a_1b_2) до 180°, т. е. углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны. Теорема доказана.

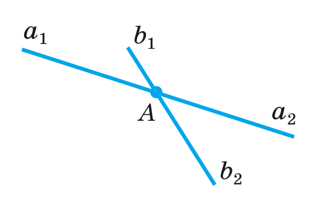


Рис. 34







Задача (9). Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.

Рис. 35

Решение.

Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные (рис. 35). Данные углы не могут быть смежными, так как их сумма равна 50°, а сумма смежных углов равна 180°. Значит, они вертикальные. Так как вертикальные углы равны и по условию их сумма 50°, то каждый из углов равен 25°.

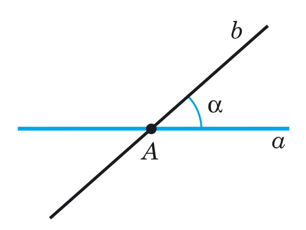
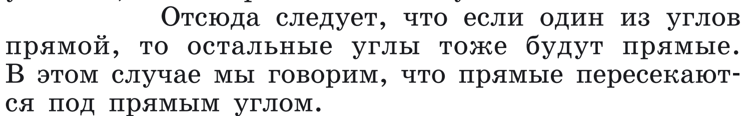


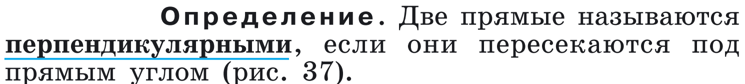
Рис. 36

16 Перпендикулярные прямые

Пусть a и b — прямые, пересекающиеся в точке A (рис. 36). Каждая из этих прямых точкой A делится на две полупрямые. Полупрямые одной прямой образуют с полупрямыми другой прямой четыре угла. Пусть α — один из этих углов. Тогда любой из остальных трёх углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α.



Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже будут прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом.



Определение. Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом (рис. 37).

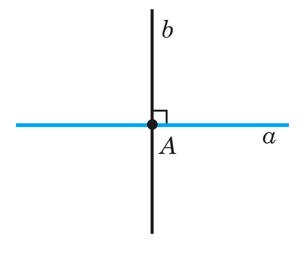


Рис. 37

Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. Запись $a \perp b$ читается: «Прямая a перпендикулярна прямой b».

Теорема 2.3

Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.

Доказательство.

Пусть a — данная прямая и A — данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой a с начальной точкой A (рис. 38). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный 90°. Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой a.

Допустим, что существует другая прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная

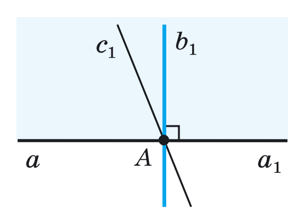


Рис. 38

прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1.

Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные каждый 90°, отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°. Поэтому не может быть другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a. Теорема доказана.

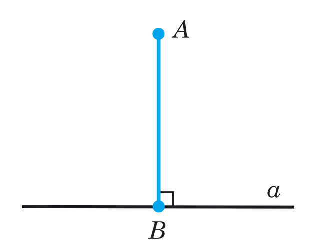
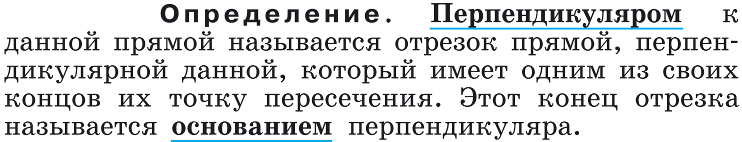


Рис. 39



Определение. **Перпендикуляром** к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов их точку пересечения. Этот конец отрезка называется **основанием** перпендикуляра.

На рисунке 39 перпендикуляр AB проведён из точки A к прямой a. Точка B — основание перпендикуляра. Для построения перпендикуляра пользуются чертёжным угольником (рис. 40).

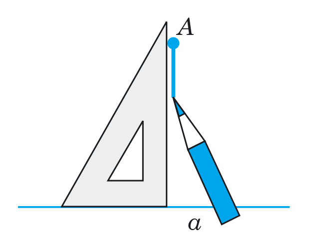


Рис. 40

17 Доказательство от противного

Способ доказательства, который мы применили в теореме 2.3, называется доказательством от противного. Этот способ доказательства состоит в том, что мы сначала делаем предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. Затем путём рассуждений, опираясь на аксиомы и доказанные теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме. На этом основании заключаем, что наше предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы.

Поясним это на примере доказательства теоремы 2.3. Теоремой утверждается, что через каждую точку прямой можно провести только одну перпендикулярную ей прямую. Допустив, что таких прямых можно провести две, мы пришли к выводу, что от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить два угла с одной и той же градусной мерой (90°). А это противоречит аксиоме откладывания углов. Согласно этой аксиоме от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить только один угол с данной градусной мерой.



18 Биссектриса угла

Определение[1]. **Биссектрисой** угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

На рисунке 41 вы видите угол (ab). Луч c исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам:

$$\angle(ac) = \angle(bc) = \frac{\angle(ab)}{2}.$$

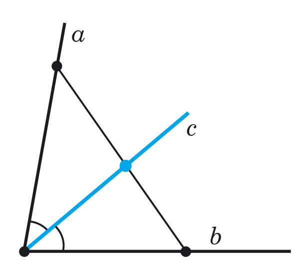


Рис. 41

Задача (17). Докажите, что биссектриса угла образует с его сторонами углы не больше 90°.

Решение.

Градусная мера любого угла не больше 180°. Поэтому половина её не больше 90°.

19 Что надо делать, чтобы успевать по геометрии



При изучении геометрии незнание чего-либо из пройденного материала может быть причиной непонимания нового материала. Приведём пример. Допустим, на уроке учитель доказывает теорему о равенстве вертикальных углов. Как вы знаете, в этом доказательстве используются определение смежных углов и теорема о сумме смежных углов. Если вы не знаете, какие углы называются смежными, не знаете теоремы о сумме смежных углов, то вы это доказательство не поймёте. В результате данный урок будет для вас пустой тратой времени. И к вашему незнанию смежных углов прибавится незнание теоремы о равенстве вертикальных углов. Поэтому для того, чтобы хорошо успевать по геометрии, нужно знать основные результаты изученного материала. А для этого надо повторять пройденный материал по контрольным вопросам.

Повторять пройденный материал по контрольным вопросам надо так. Прочитайте вопрос. Уясните его себе. Если требуется дать определение

[1] В дальнейшем слово «определение» писать не будем, а определяемое понятие будем выделять **жирным** шрифтом с чертой.

какой-либо фигуры, мысленно дайте такое определение. Полезно сделать от руки чертёж определяемой фигуры. Если в вопросе речь идёт о теореме, сформулируйте её, уясните себе, в чем условие и заключение этой теоремы. Сделайте чертёж, иллюстрирующий содержание теоремы. Доказательство теоремы при каждом повторении давать необязательно.

Повторяйте пройденный материал каждый раз, когда при изучении нового материала вы обнаруживаете незнание чего-либо.

Контрольные вопросы

1. Какие углы называются смежными?
2. Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.
3. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
4. Какой угол называется прямым (острым, тупым)?
5. Докажите, что угол, смежный с прямым, есть прямой угол.
6. Какие углы называются вертикальными?
7. Докажите, что вертикальные углы равны.
8. Докажите, что если при пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.
9. Какие прямые называются перпендикулярными? Какой знак используется для обозначения перпендикулярности прямых?
10. Докажите, что через любую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.
11. Что такое перпендикуляр к прямой?
12. Объясните, в чём состоит доказательство от противного.
13. Что называется биссектрисой угла?
14. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 22—26)? Приведите свои примеры геометрических фигур.

Задачи

Пункт 14

1. Найдите углы, смежные с углами 30°, 45°, 60°, 90°.
2. Могут ли два смежных угла быть оба: 1) острыми; 2) тупыми; 3) прямыми? Обоснуйте ответ.
3. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.
4. Найдите смежные углы, если: 1) один из них на 30° больше другого; 2) их разность равна 40°; 3) один из них в три раза меньше другого; 4) они равны.
5. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают: 1) 6 ч; 2) 3 ч; 3) 4 ч?
6. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23.

Пункт 15

7. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?
8. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?
9. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.
10. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в четыре раза больше другого. Найдите эти углы.
11. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.
12. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трёх из этих углов равна 270°.

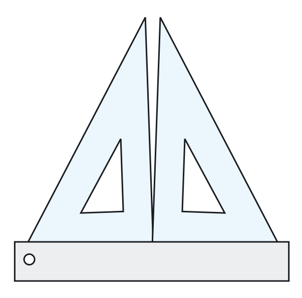


Рис. 42

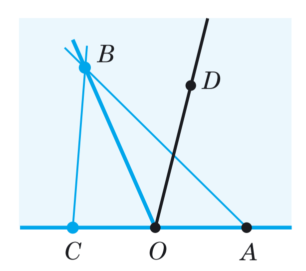


Рис. 43

Пункт 16

13. Докажите, что если три из четырёх углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны, то прямые перпендикулярны.
14. Как с помощью линейки проверить, является ли прямым угол в чертёжном угольнике (рис. 42)?

Пункт 18

15. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?
16. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.
17. Докажите, что биссектриса угла образует с его сторонами углы не больше 90°.
18. Докажите, что если луч исходит из вершины угла и образует с его сторонами равные острые углы, то он является биссектрисой угла.
19. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.
20. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
21. Найдите угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон данного угла, равного: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

Пункт 19

22. Из вершины *O* смежных углов *AOB* и *COB* проведён луч *OD* в полуплоскость, где проходит общая сторона *OB* углов (рис. 43). Докажите, что луч *OD* пересекает либо отрезок *AB*,

либо отрезок BC. Какой из отрезков пересекает луч OD, если угол AOD меньше (больше) угла AOB? Объясните ответ.

23. Из вершины развёрнутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи b и c. Чему равен угол (bc), если: 1) $\angle(ab) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 2) $\angle(a_1b) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 3) $\angle(ab) = 60°$, $\angle(a_1c) = 30°$?

24. Из вершины развёрнутого угла (aa_1) проведены лучи b и c в одну полуплоскость. Известно, что $\angle(ab) = 60°$, а $\angle(ac) = 30°$. Найдите углы (a_1b), (a_1c) и (bc).

25. От полупрямой AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Найдите угол CAD, если: 1) $\angle BAC = 80°$, $\angle BAD = 170°$; 2) $\angle BAC = 87°$, $\angle BAD = 98°$; 3) $\angle BAC = 140°$, $\angle BAD = 30°$; 4) $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = 70°$.

26. Даны три луча a, b, c с общей начальной точкой. Известно, что $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120°$. 1) Проходит ли какой-нибудь из этих лучей между сторонами угла, образованного двумя другими лучами? 2) Может ли прямая пересекать все три данных луча? Объясните ответ.



§ 3 Признаки равенства треугольников

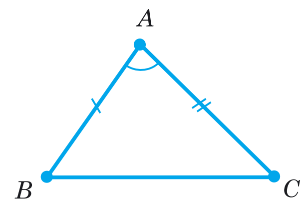
20 Первый признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними

Теорема 3.1

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 44). Докажем, что треугольники равны.



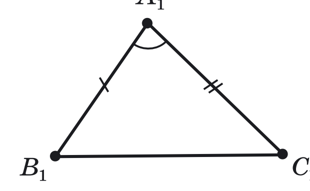
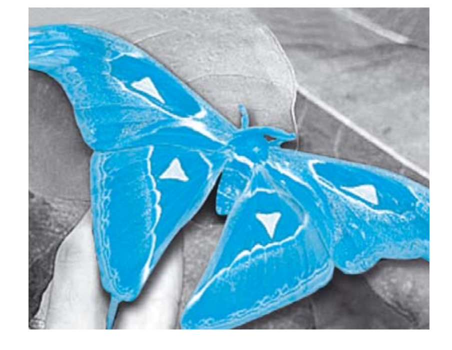


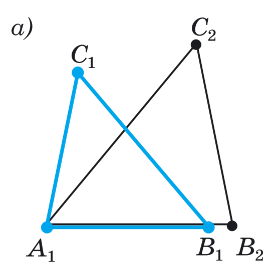
Рис. 44

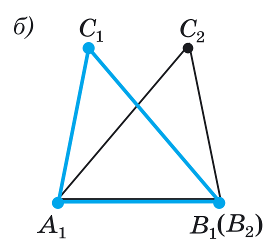


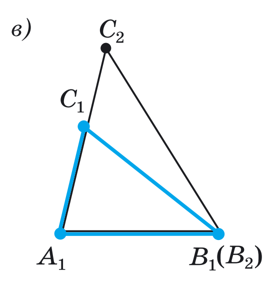
Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1 (рис. 45, *а*).

Так как $A_1B_1 = A_1B_2$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1 (рис. 45, *б*). Так как $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1 (рис. 45, *в*). Так как $A_1C_1 = A_1C_2$, то вершина C_2 совпадает с вершиной C_1 (рис. 45, *г*).

Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.







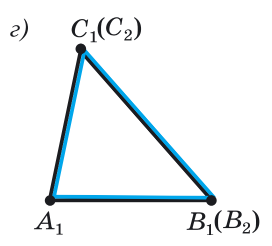


Рис. 45

Задача (1). Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 10 м?

Решение.

Треугольники AOC и BOD равны по первому признаку равенства треугольников (рис. 46). У них углы AOC и BOD равны как вертикальные, а $OA = OB$ и $OC = OD$ потому, что точка O является серединой отрезков AB и CD. Из равенства треугольников AOC и BOD следует равенство их сторон AC и BD. А так как по условию задачи $AC = 10$ м, то и $BD = 10$ м.

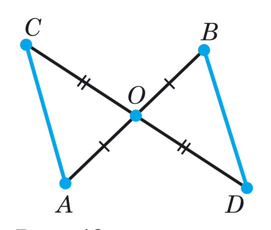


Рис. 46

21 Использование аксиом при доказательстве теорем

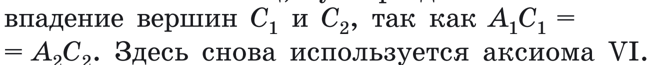
Как мы знаем, при доказательстве теорем разрешается пользоваться аксиомами и доказанными ранее теоремами. Обычно в доказательстве ссылаются не на номер аксиомы по списку, а на её содержание. Именно таким образом мы поступали в доказательстве первого признака равенства треугольников (теорема 3.1). Разберём ещё раз это доказательство, указывая аксиомы, которые в нём используются.

Доказательство начинается словами: «Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1». Такой треугольник, как мы знаем, существует по аксиоме VIII.

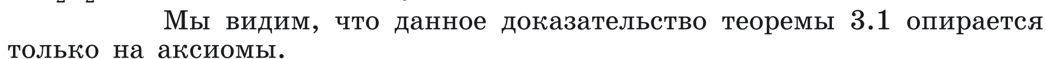
Далее утверждается совпадение вершин B_1 и B_2 на том основании, что $A_1B_1 = A_1B_2$. Здесь используется аксиома откладывания отрезков (аксиома VI).

Затем утверждается совпадение лучей A_1C_2 и A_1C_1 на том основании, что $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$. Здесь используется аксиома откладывания углов (аксиома VII).

Наконец, утверждается совпадение вершин C_1 и C_2, так как $A_1C_1 =$ $= A_2C_2$. Здесь снова используется аксиома VI.



Мы видим, что данное доказательство теоремы 3.1 опирается только на аксиомы.



22 Второй признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам

Теорема 3.2

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 47). Докажем, что треугольники равны.

Пусть $A_1B_2C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, с вершиной B_2 на луче A_1B_1 и вершиной C_2 в той же полуплоскости относительно прямой A_1B_1, где лежит вершина C_1.

Так как $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1.

Так как $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_1C_2 =$ $= \angle A_1B_1C_1$, то луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1, а луч B_1C_2 совпадает с лучом B_1C_1. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1.

Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.

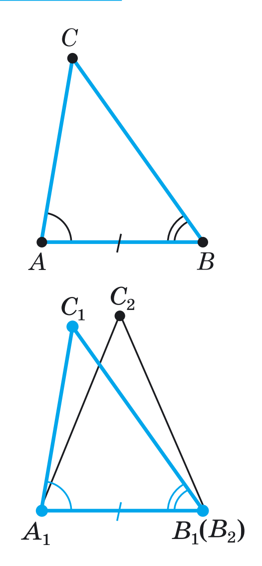


Рис. 47

23 Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона называется **основанием** треугольника.

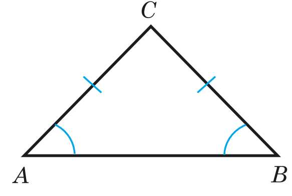


Рис. 48

На рисунке 48 изображён равнобедренный треугольник ABC. У него боковые стороны AC и BC, а основание AB.

Докажем свойство углов равнобедренного треугольника.

Теорема 3.3

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB (рис. 48). Докажем, что у него $\angle A = \angle B$.



Треугольник CAB равен треугольнику CBA по первому признаку равенства треугольников. Действительно,

$$CA = CB,\ CB = CA,\ \angle C = \angle C.$$

Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$. Теорема доказана.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним**.

Задача (12). Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник с равными сторонами:

$$AB = BC = CA \text{ (рис. 49).}$$

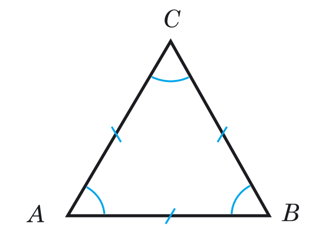


Рис. 49

Так как $AB = BC$, то этот треугольник равнобедренный с основанием AC. По теореме 3.3 $\angle C = \angle A$.

Так как $BC = CA$, то треугольник ABC равнобедренный с основанием AB. По теореме 3.3 $\angle A = \angle B$. Таким образом,

$$\angle C = \angle A = \angle B,$$

т. е. все углы треугольника равны.

24 Обратная теорема

Докажем признак равнобедренного треугольника.

Теорема 3.4

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство.

Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle A = \angle B$ (рис. 50). Докажем, что он равнобедренный с основанием AB.

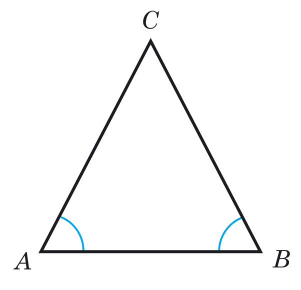


Рис. 50

Треугольник ABC равен треугольнику BAC по второму признаку равенства треугольников. Действительно, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$. Значит, по определению треугольник ABC равнобедренный. Теорема доказана.

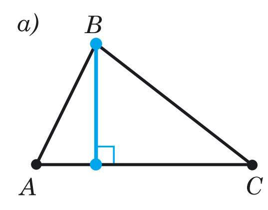
Теорема 3.4 называется **обратной** теореме 3.3. Заключение теоремы 3.3 является условием теоремы 3.4. А условие теоремы 3.3 является заключением теоремы 3.4. Не всякая теорема имеет обратную, т. е. если данная теорема верна, то обратная теорема может быть неверна. Поясним это на примере теоремы о вертикальных углах. Эту теорему можно сформулировать так: если два угла вертикальные, то они равны. Обратная ей теорема была бы такой: если два угла равны, то они вертикальные. А это, конечно, неверно. Два равных угла вовсе не обязаны быть вертикальными.

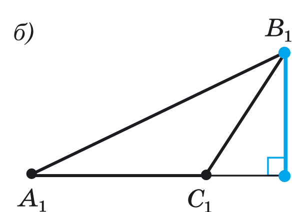
Задача (16). Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 12.

Решение.

В задаче 12 условие состоит в том, что треугольник равносторонний, а заключение — в том, что все углы треугольника равны. Поэтому обратная теорема должна формулироваться так: если у треугольника все углы равны, то он равносторонний.

Докажем эту теорему. Пусть ABC — треугольник с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C$. Так как $\angle A = \angle B$, то по теореме 3.4 $AC = CB$. Так как $\angle B = \angle C$, то по теореме 3.4 $AC = AB$. Таким образом, $AB = AC = CB$, т. е. все стороны треугольника равны. Значит, по определению треугольник ABC равносторонний.





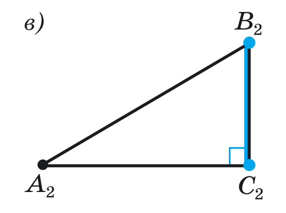


Рис. 51

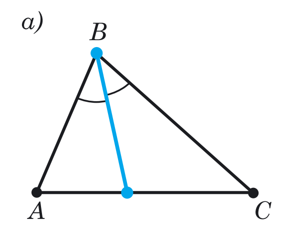
25 Высота, биссектриса и медиана треугольника

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, которая содержит противолежащую сторону треугольника.

На рисунке 51 вы видите три треугольника, у которых проведены высоты из вершин B, B_1 и B_2. На рисунке 51, *а* основание высоты лежит на стороне треугольника, на рисунке 51, *б* — на продолжении стороны треугольника, на рисунке 51, *в* — совпадает с точкой C_2.

Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне (рис. 52, *а*).

Медианой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника (рис. 52, *б*).



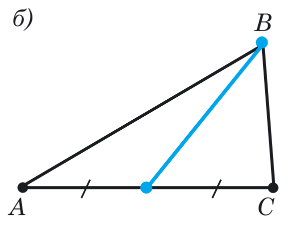


Рис. 52

26 Свойство медианы равнобедренного треугольника

Теорема 3.5

В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.

Доказательство.

Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — медиана, проведённая к основанию (рис. 53).

Треугольники CAD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников. (У них стороны AC и BC равны, потому что треугольник ABC равнобедренный. Углы CAD и CBD равны как углы при основании равнобедренного треугольника. Стороны AD и BD равны, потому что D — середина отрезка AB.)

Из равенства треугольников следует равенство углов: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Так как углы ACD и BCD равны, то CD — биссектриса. Так как углы ADC и BDC смежные и равны, то они прямые, поэтому CD — высота треугольника. Теорема доказана.

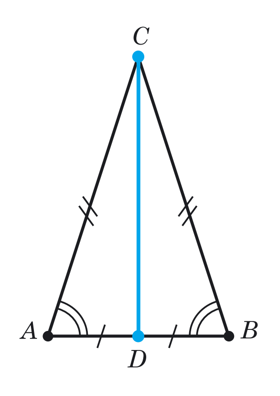


Рис. 53

Задача (28). Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

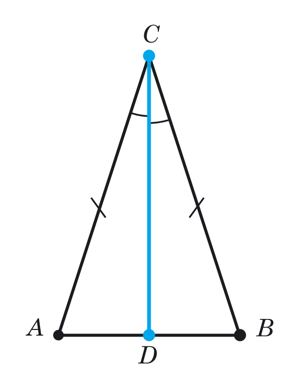


Рис. 54

Решение.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его биссектриса (рис. 54). Треугольники ACD и BCD равны по первому признаку. У них сторона CD общая, стороны AC и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника, а углы при вершине C равны, потому что CD — биссектриса. Из равенства треугольников следует равенство их сторон AD и BD. Значит, CD — медиана треугольника ABC. А по свойству медианы равнобедренного треугольника она является и высотой.

27 Третий признак равенства треугольников по трём сторонам

Теорема 3.6

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

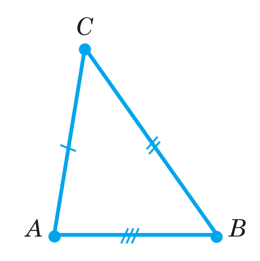
Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 55). Требуется доказать, что треугольники равны.

Допустим, треугольники не равны. Тогда у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Иначе они были бы равны по первому признаку.

Пусть $A_1B_1C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (см. рис. 55).

Пусть D — середина отрезка C_1C_2. Треугольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ равнобедренные с общим основанием C_1C_2. Поэтому их медианы A_1D и B_1D являются высотами. Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2.

Прямые A_1D и B_1D не совпадают, так как точки A_1, B_1, D не лежат на одной прямой. Но через точку D прямой C_1C_2 можно провести только од-



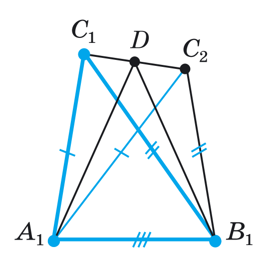


Рис. 55

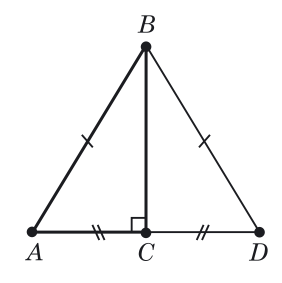
ну перпендикулярную ей прямую. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (29). У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники (рис. 56). Построим треугольник CBD, равный треугольнику CBA, и треугольник $C_1D_1B_1$, равный треугольнику $C_1A_1B_1$, как показано на рисунке 56.

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по третьему признаку. У них $AB = A_1B_1$ по условию задачи; $AD = A_1D_1$, так как $AC = A_1C_1$; $BD = B_1D_1$, так как $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$. Из равенства треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует равенство углов: $\angle A = \angle A_1$. Так как по условию $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а $\angle A = \angle A_1$ по доказанному, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку.



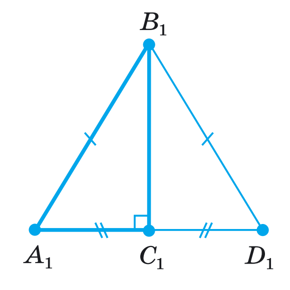


Рис. 56

28 Как готовиться по учебнику самостоятельно

Допустим, по какой-нибудь причине, например по болезни, вы не были на уроке. Тогда материал этого урока вам придётся изучить самостоятельно по учебнику. Текст учебника надо читать не спеша, по предложениям, не переходя к следующему предложению, не поняв смысла предыдущего. Рассмотрим конкретный пример — доказательство третьего признака равенства треугольников. Итак, читаем текст учебника:

> «Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника...»

Чтобы понять смысл этого предложения, надо знать, что такое треугольник, его стороны и равенство сторон. Вы всё это знаете, поэтому смысл прочитанного предложения вам ясен. Читаем дальше:

> «...то такие треугольники равны».

Чтобы понять смысл этого предложения, надо знать, какие треугольники называются равными. Но вы и это знаете.

Таким образом, смысл теоремы вам ясен. Читаем доказательство.

«Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (см. рис. 55). Требуется доказать, что треугольники равны».

Здесь всё ясно. Обозначаются треугольники, которые удовлетворяют условию теоремы и равенство которых надо доказать.

«Допустим, треугольники не равны».

Вы видите, что делается предположение, противоположное утверждению теоремы. Значит, в ходе дальнейшего рассуждения мы должны прийти к противоречию (доказательство от противного).

«Тогда у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Иначе они были бы равны по первому признаку».

Вспомните первый признак равенства треугольников. Убедитесь в том, что если выполнено хотя бы одно из равенств $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, а это противоречит сделанному предположению.

«Пусть $A_1B_1C_2$ — треугольник, равный треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (см. рис. 55)».

Здесь всё ясно. Этой фразой начиналось доказательство и первого, и второго признаков.

«Пусть D — середина отрезка C_1C_2».

Вы знаете, что такое середина отрезка.

«Треугольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ равнобедренные с общим основанием C_1C_2».

Чтобы понять смысл этого утверждения, надо знать, какой треугольник называется равнобедренным и какая его сторона называется основанием.

«Поэтому их медианы A_1D и B_1D являются высотами».

Смысл этого предложения вам ясен. Вы знаете, что такое медиана и высота, и знаете свойство медианы равнобедренного треугольника.

«Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2».

Ясно.

«Прямые A_1D и B_1D не совпадают, так как точки A_1, B_1, D не лежат на одной прямой».

Ясно. Если бы точка D лежала на прямой A_1B_1, то точки C_1 и C_2 были бы в разных полуплоскостях относительно прямой A_1B_1.

«Но через точку D прямой C_1C_2 можно провести только одну перпендикулярную ей прямую».

Ясно. Вы знаете такую теорему.

«Мы пришли к противоречию».

Ясно.

«Теорема доказана».

Контрольные вопросы

1. Докажите первый признак равенства треугольников. Какие аксиомы используются при доказательстве теоремы 3.1?
2. Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.
3. Какой треугольник называется равнобедренным? Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами? Какая сторона называется основанием?
4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
5. Какой треугольник называется равносторонним?
6. Докажите, что если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.
7. Объясните, что такое обратная теорема. Приведите пример. Для всякой ли теоремы верна обратная?
8. Что такое высота треугольника?
9. Что такое биссектриса треугольника?
10. Что такое медиана треугольника?
11. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.
12. Докажите третий признак равенства треугольников.
13. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 29—32)? Приведите свои примеры геометрических фигур.

Задачи

■ Пункт 20

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 10 м?
2. Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB (рис. 57). Докажите, что каждая точка X этой прямой одинаково удалена от точек A и B.

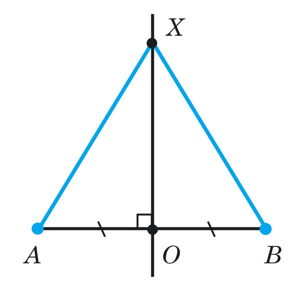


Рис. 57

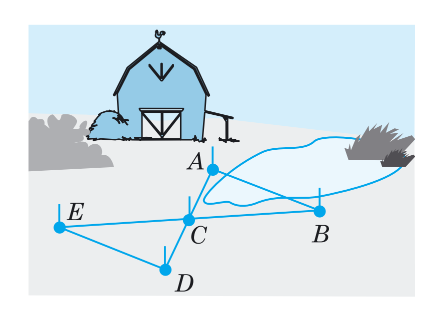


Рис. 58

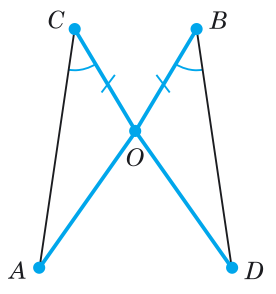


Рис. 59

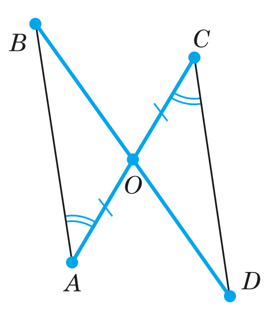


Рис. 60

3. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

4. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 58), выбирают такую точку C, из которой можно пройти и к точке A, и к точке B и из которой видны обе эти точки. Провешивают[1] отрезки AC и BC, продолжают их за точку C и отмеряют $CD = AC$ и $EC = CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию. Объясните почему.

Пункт 22

5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 59). Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO = CO$.

6. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O (рис. 60). Докажите равенство треугольников BAO и DCO, если известно, что угол BAO равен углу DCO и $AO = CO$.

7. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB (рис. 61) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE. Выбирают на местности точку D, из которой видна точка A и можно пройти к точкам B и E. Провешивают прямые BDQ и EDF и отмеряют $FD = DE$ и $DQ = BD$. Затем идут по прямой FQ, глядя на точку A, пока не найдут точку H, которая лежит на прямой AD. Тогда HQ равно искомому расстоянию. Докажите.

---

[1] Отмечают направление шестами-вехами.

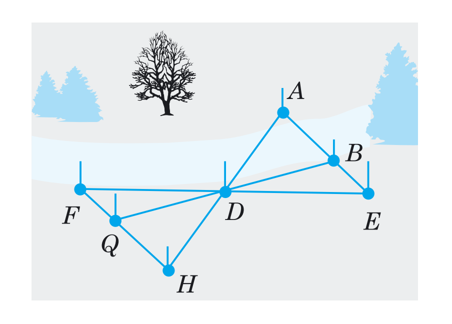


Рис. 61

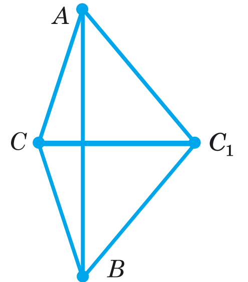


Рис. 62

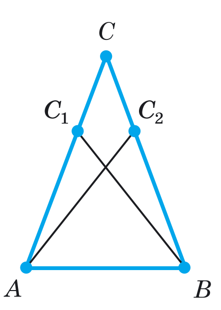


Рис. 63

Пункт 23

8. Периметр (сумма длин сторон) равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Найдите длину боковой стороны.

9. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание.

10. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если основание: 1) меньше боковой стороны на 3 м; 2) больше боковой стороны на 3 м.

11. Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

12. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 на стороне CA и CB_1 на стороне CB. Докажите равенство треугольников: 1) CAB_1 и CBA_1; 2) ABB_1 и BAA_1.

13. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1. Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольники AB_1C и BA_1C равны.

14. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1. Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные (рис. 62).

Пункт 24

15. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 12.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если треугольники ABC_1 и BAC_2 равны (рис. 63).

17. 1) Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются также вершинами равнобедренного треугольника.

2) Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются также вершинами равностороннего треугольника.

Пункт 25

18. 1) Начертите треугольник с острыми углами. С помощью чертёжного угольника и линейки проведите в нём высоты. Повторите упражнение для треугольника, у которого один угол тупой.
2) Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите в нём биссектрисы.
3) Начертите треугольник. С помощью линейки с делениями проведите в нём медианы.

Пункт 26

19. Докажите, что у равнобедренного треугольника: 1) биссектрисы, проведённые из вершин при основании, равны; 2) медианы, проведённые из тех же вершин, тоже равны.

20. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: 1) медианы, проведённые из вершин A и A_1, равны; 2) биссектрисы, проведённые из вершин A и A_1, равны.

21. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причём отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD (рис. 64).

22. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM. На ней взята точка D. Докажите равенство треугольников: 1) ABD и CBD; 2) AMD и CMD.

24. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него: 1) медиана BD является высотой; 2) высота BD является биссектрисой; 3) биссектриса BD является медианой.

25. Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведённые к основанию, лежат на одной прямой.

26. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.

27. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

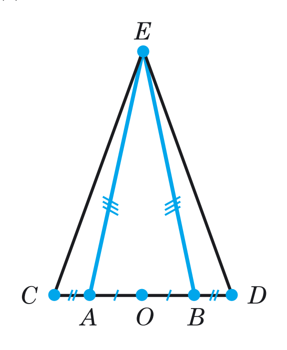


Рис. 64

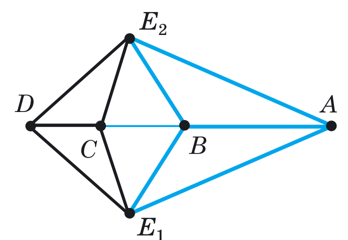


Рис. 65

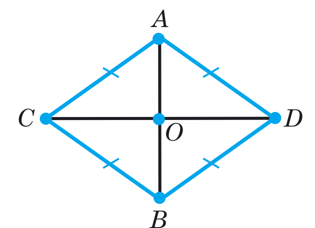


Рис. 66

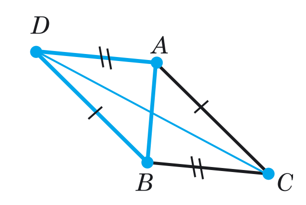
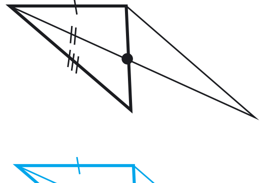
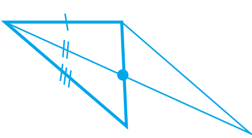


Рис. 67

Пункт 27



Рис. 68

28. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

29. Докажите, что у равнобедренного треугольника высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

30. Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.

31. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны (рис. 65).

32. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC.

33. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них.

34. Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что если отрезки AC, CB, BD и AD равны, то луч AB является биссектрисой угла CAD и луч CD — биссектрисой угла ACB (рис. 66).

35. Докажите, что в задаче 34 прямые AB и CD перпендикулярны.

36. Треугольники ABC и BAD равны, причём точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 67). Докажите, что: 1) треугольники CBD и DAC равны; 2) прямая CD делит отрезок AB пополам.

37. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.

38. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины (рис. 68).

39. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

40. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углам, образованным с ней медианой.



Сумма углов треугольника

29 Параллельность прямых

Теорема 4.1

Две прямые, параллельные третьей, параллельны.

Доказательство.

Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Допустим, что прямые a и b не параллельны (рис. 69). Тогда они пересекаются в некоторой точке C. Значит, через точку C проходят две прямые, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Теорема доказана.

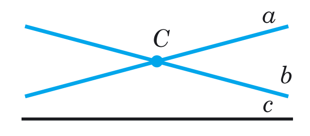


Рис. 69

Задача (4). Прямые AB и CD параллельны. Докажите, что если отрезок BC пересекает прямую AD, то точка пересечения принадлежит отрезку AD (рис. 70).

Решение.

Пусть X — точка пересечения отрезка BC с прямой AD. Проведём через неё прямую x, параллельную прямой AB. Она будет параллельна и прямой CD. Прямая x разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки B и C лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок BC пересекает прямую x (в точке X). Точка A лежит в той же полуплоскости, что и B, а точка D — в той же полуплоскости, что и C. Поэтому отрезок AD пересекает прямую x. А точкой пересечения является точка X отрезка BC.

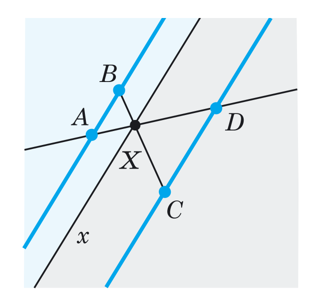


Рис. 70

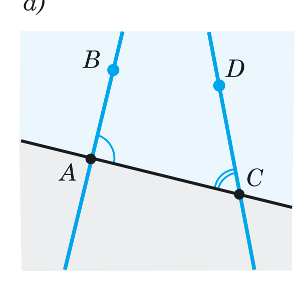
30 Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей



Пусть AB и CD — две прямые и AC — прямая, пересекающая прямые AB и CD (рис. 71). Прямая AC по отношению к прямым AB и CD называется **секущей**.

Пары углов, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей AC, имеют специальные названия.

Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются **внутренними односторонними** (рис. 71, *а*). Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются **внутренними накрест лежащими** (рис. 71, *б*).



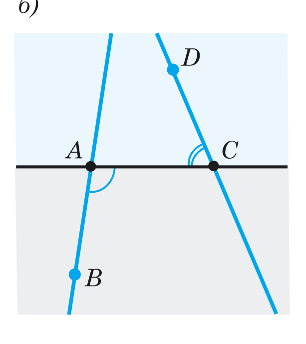


Рис. 71

Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Внутренние накрест лежащие углы одной пары, например $\angle 1$ и $\angle 2$, являются смежными внутренним накрест лежащим углам другой пары: $\angle 3$ и $\angle 4$ (рис. 72).

Поэтому если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны.

Пара внутренних накрест лежащих углов, например $\angle 1$ и $\angle 2$, и пара внутренних односторонних углов, например $\angle 2$ и $\angle 3$, имеют один угол общий — $\angle 2$, а два других угла смежные: $\angle 1$ и $\angle 3$.

Поэтому если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°. И обратно: если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны.

31 Признак параллельности прямых

Теорема 4.2

Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство.

Пусть прямые a и b образуют с секущей AB равные внутренние накрест лежащие углы (рис. 73, *а*). Допустим, прямые a и b не параллельны, а значит, пересекаются в некоторой точке C (рис. 73, *б*).

Секущая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит точка C. Построим треугольник BAC_1, равный треугольнику ABC, с вершиной C_1 в другой полуплоскости. По условию внутренние накрест лежащие углы при прямых a, b и секущей AB равны. Так как соответствующие углы треугольников ABC и BAC_1 с вершинами A и B равны, то они совпадают с внутренни-

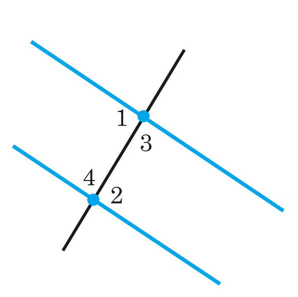


Рис. 72

ми накрест лежащими углами. Значит, прямая AC_1 совпадает с прямой a, а прямая BC_1 совпадает с прямой b. Получается, что через точки C и C_1 проходят две различные прямые a и b. А это невозможно. Значит, прямые a и b параллельны.

Если у прямых a и b и секущей AB сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то, как мы знаем, внутренние накрест лежащие углы равны. Значит, по доказанному выше прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Из теоремы 4.2 следует, что

две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Если у пары внутренних накрест лежащих углов один угол заменить вертикальным ему, то получится пара углов, которые называются **соответственными углами** данных прямых с секущей.

Углы 1 и 2 на рисунке 74 внутренние накрест лежащие, а углы 1 и 3 соответственные.

Из равенства внутренних накрест лежащих углов следует равенство соответственных углов, и наоборот. Отсюда получается признак параллельности прямых по соответственным углам. Именно:

прямые параллельны, если соответственные углы равны.

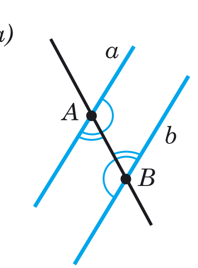
Задача (8). Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.

Решение.

Прямая AC разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 75). Точка B лежит в одной из них. Отложим от полупрямой CA в другую полуплоскость угол ACD, равный углу CAB. Тогда прямые AB и CD будут параллельны. В самом деле, для этих прямых и секущей AC углы BAC и DCA внутренние накрест лежащие. А так как они равны, то прямые AB и CD параллельны.

Сопоставляя утверждение задачи 8 и аксиомы IX (основного свойства параллельных прямых), приходим к важному выводу:

через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одну.



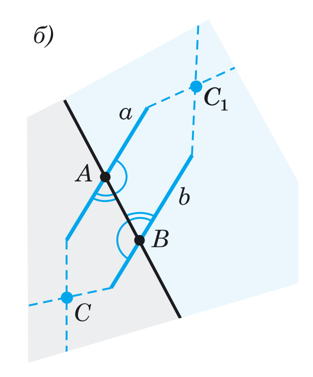


Рис. 73

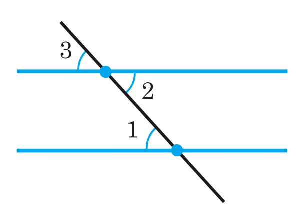


Рис. 74

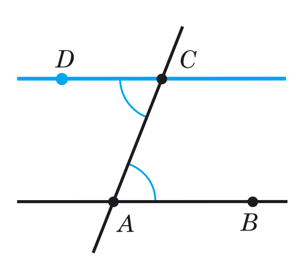


Рис. 75

32 Свойство углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

Теорема 4.3

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Доказательство.

Пусть a и b — параллельные прямые и c — прямая, пересекающая их в точках A и B. Проведём через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей c с прямыми a_1 и b, были равны (рис. 76).

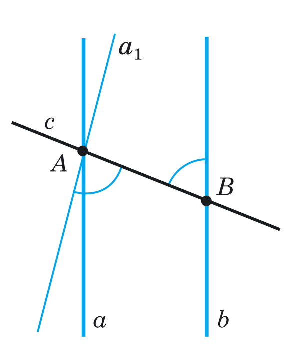


Рис. 76

По признаку параллельности прямых прямые a_1 и b параллельны. А так как через точку A проходит только одна прямая, параллельная прямой b, то прямая a совпадает с прямой a_1. Значит, внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей с параллельными прямыми a и b, равны. Теорема, обратная теореме 4.2, доказана.

Из свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, следует:

если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Задача (13). Прямые AC и BD параллельны, причём точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC (рис. 77). Докажите, что: 1) углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие относительно секущей BC; 2) луч BC проходит между сторонами угла ABD; 3) углы CAB и DBA внутренние односторонние относительно секущей AB.

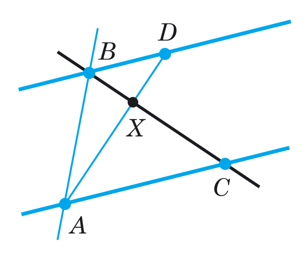


Рис. 77

Решение.

1) Углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие потому, что точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC. 2) Луч BC проходит между сторонами угла ABD потому, что он пересекает отрезок AD с концами на сторонах угла (задача 4). 3) Углы CAB и DBA внутренние односторонние потому, что точки C и D лежат по одну сторону от секущей AB, а именно в полуплоскости, где лежит точка X пересечения отрезков BC и AD.

33 Сумма углов треугольника

Теорема 4.4

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство.

Пусть *ABC* — данный треугольник. Проведём через вершину *B* прямую, параллельную прямой *AC*. Отметим на ней точку *D* так, чтобы точки *A* и *D* лежали по разные стороны от прямой *BC* (рис. 78).

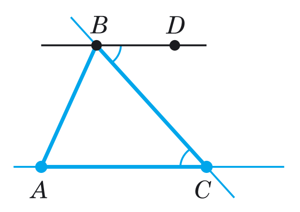


Рис. 78

Углы *DBC* и *ACB* равны как внутренние накрест лежащие, образованные секущей *BC* с параллельными прямыми *AC* и *BD*. Поэтому сумма углов треугольника при вершинах *B* и *C* равна углу *ABD*.

А сумма всех трёх углов треугольника равна сумме углов *ABD* и *BAC*. Так как эти углы внутренние односторонние для параллельных прямых *AC* и *BD* и секущей *AB*, то их сумма равна 180°. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 следует, что



у любого треугольника хотя бы два угла острые.

Действительно, допустим, что у треугольника только один острый угол или вообще нет острых углов. Тогда у этого треугольника есть два угла, каждый из которых не меньше 90°. Сумма этих двух углов уже не меньше 180°. А это невозможно, так как сумма всех углов треугольника равна 180°, что и требовалось доказать.

Задача (30). Чему равны углы равностороннего треугольника?

Решение.

У равностороннего треугольника, как мы знаем, все углы равны. Так как они в сумме дают 180°, то каждый из них равен 60°.

34 Внешние углы треугольника

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 79).

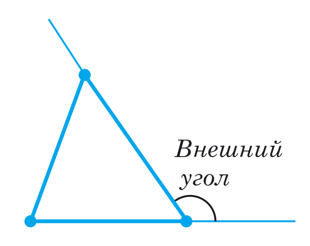


Рис. 79

Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой же вершине, его иногда называют **внутренним углом**.

Теорема 4.5

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Доказательство.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 80). По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Отсюда следует, что

$$\angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

В правой части этого равенства стоит градусная мера внешнего угла треугольника при вершине C. Теорема доказана.

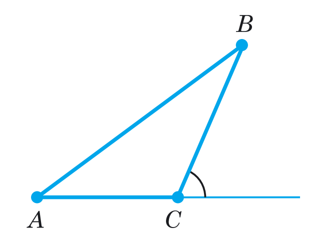
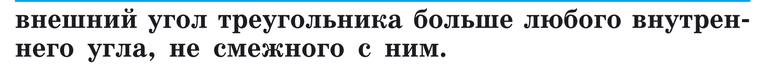


Рис. 80

Из теоремы 4.5 следует, что


внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Задача (35). В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трёх точек A, B, D лежит между двумя другими точками, если углы A и B треугольника острые?

Решение.

Точка B не может лежать между точками A и D. Если бы она лежала между точками A и D (рис. 81), то острый угол ABC как внешний угол треугольника CBD был бы больше прямого угла CDB. Точно так же доказывается, что и точка A не может лежать между точками B и D. Значит, точка D лежит между точками A и B.

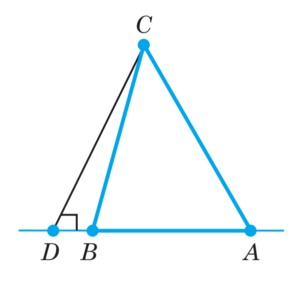


Рис. 81

35 Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол. Треугольник называется **остроугольным**, если все его углы острые, и **тупоугольным**, если у него есть тупой угол.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то у прямоугольного треугольника только один прямой угол. Два других угла прямоугольного треугольника острые. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $180° - 90° = 90°$.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны называются **катетами** (рис. 82).

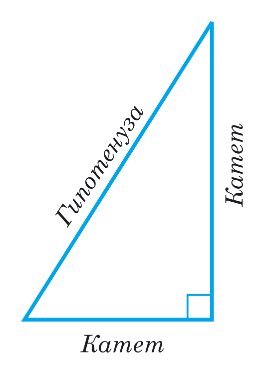


Рис. 82

Задача (43). Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

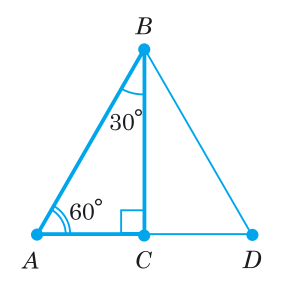


Рис. 83

Решение.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и углом B, равным 30° (рис. 83). Построим треугольник DBC, равный треугольнику ABC, как показано на рисунке 83.

У треугольника ABD все углы равны (60°), поэтому он равносторонний. Так как $AC = \frac{1}{2}AD$, а $AD = AB$, то $AC = \frac{1}{2}AB$.

Что и требовалось доказать.

Для прямоугольных треугольников, кроме трёх известных нам признаков равенства, имеются другие признаки. Вот эти признаки:

1. **Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.** (Признак равенства по гипотенузе и острому углу.)
2. **Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.** (Признак равенства по катету и противолежащему углу.)
3. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.** (Признак равенства по гипотенузе и катету.)

Доказательство.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — прямоугольные треугольники с прямыми углами C и C_1, для которых выполняется одно из условий:

1) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;
2) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;
3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Докажем, что треугольники равны (рис. 84).

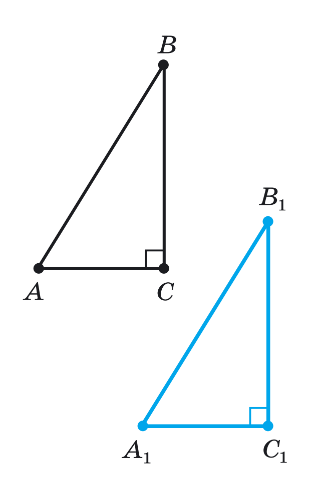


Рис. 84

Для доказательства первых двух признаков достаточно заметить, что если $\angle A = \angle A_1$, то и $\angle B = \angle B_1$. А тогда треугольники в обоих случаях равны по второму признаку равенства треугольников.

Доказательство признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету было дано в решении задачи 29 к § 3.

Задача (48). Докажите, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение.

Проведём биссектрисы данного треугольника ABC из вершин A и B (рис. 85). Они пересекутся в некоторой точке O. Опустим из точки O перпендикуляры OD, OE и OF на стороны треугольника ABC, как показано на рисунке 85.

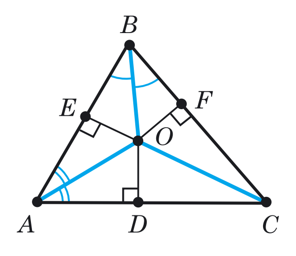


Рис. 85

Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и острому углу. У них гипотенуза AO общая, а углы OAD и OAE равны, так как по построению AO — биссектриса угла A. Из равенства треугольников следует равенство их катетов OD и OE. Точно так же равенство катетов OE и OF следует из равенства по гипотенузе и острому углу прямоугольных треугольников BOE и BOF. Значит, катеты OD и OF как равные катету OE равны между собой.

Прямоугольные треугольники COD и COF равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза CO общая, а катеты OD и OF равны по доказанному. Из равенства треугольников следует равенство их острых углов OCD и OCF. Поэтому луч CO является биссектрисой угла C треугольника ABC. А это значит, что все три биссектрисы данного треугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

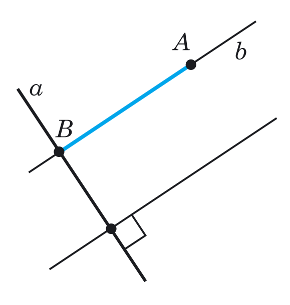


Рис. 86

36 Существование и единственность перпендикуляра к прямой

Теорема 4.6

Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.

Доказательство.

Пусть a — данная прямая и A — не лежащая на ней точка (рис. 86). Проведём через какую-нибудь точку прямой a перпендикулярную прямую. А теперь проведём через точку A параллельную ей прямую b. Она будет перпендикулярна прямой a, так как прямая a, будучи перпендикулярной одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой. Отрезок AB прямой b и есть перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a.

Докажем единственность перпендикуляра AB. Допустим, существует другой перпендикуляр AC. Тогда у треугольника ABC будут два прямых угла. А это невозможно. Теорема доказана.



Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется **расстоянием от точки до прямой**.

Задача (51). Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

Решение.

Пусть a и b — параллельные прямые и A, A_1 — любые точки на прямой a (рис. 87). Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1B_1 на прямую b. Отложим из точки B_1 на прямой b отрезок B_1B, равный отрезку AA_1, так, чтобы точки A_1 и B были по разные стороны прямой AB_1. Тогда треугольники AB_1A_1 и B_1AB равны по первому признаку. У них сторона AB_1 общая, $AA_1 = BB_1$ по построению, а углы B_1AA_1 и AB_1B равны как внутренние накрест лежащие при параллельных a и b с секущей AB_1. Из равенства треугольников следует, что AB есть перпендикуляр к прямой b и $AB = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

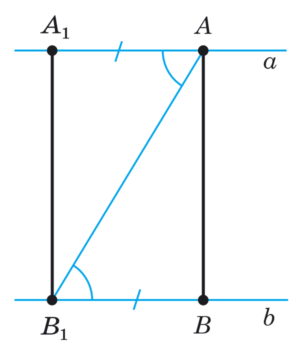


Рис. 87

Как видим, расстояния от всех точек прямой до параллельной прямой равны. Поэтому говорят, что параллельные прямые равноотстоящие. **Расстоянием между параллельными прямыми** называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

37 Из истории возникновения геометрии

Первоначальные сведения о свойствах геометрических фигур люди получили, наблюдая окружающий мир и в результате практической деятельности. Со временем учёные заметили, что некоторые свойства геометрических фигур можно вывести из других свойств путём рассуждения. Так возникли теоремы и доказательства.



Появилось естественное желание по возможности сократить число тех свойств геометрических фигур, которые берутся непосредственно из опыта. Утверждения оставшихся без доказательств свойств стали аксиомами. Таким образом, аксиомы имеют опытное происхождение.

Геометрия в ранний период своего развития достигла особенно высокого уровня в Египте. В 1-м тыс. до н. э. геометрические сведения от египтян перешли к грекам. За период с VII по III в. до н. э. греческие геометры не только обогатили геометрию многочисленными новыми теоремами, но и сделали также серьёзные шаги к строгому её обоснованию. Многовековая работа греческих геометров за этот период была подытожена Евклидом (330—275 гг. до н. э.) в его знаменитом труде «Начала».



Н. И. Лобачевский — русский математик (1792—1856)

Изложение геометрии в «Началах» Евклида построено на системе аксиом. Эта система аксиом отличается от системы аксиом, принятой в данном учебнике. Но в ней также есть аксиома параллельных. Аксиома параллельных в отличие от других аксиом не подкрепляется наглядными соображениями. Может быть, поэтому со времён Евклида математики многих стран пытались доказать её как теорему. Но это никому не удавалось. Наконец, в XIX в. было доказано, что это невозможно сделать. Первым, кто обоснованно высказал это утверждение, был великий русский математик Николай Иванович Лобачевский.

Контрольные вопросы

1. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.
2. Объясните, какие углы называются внутренними односторонними. Какие углы называются внутренними накрест лежащими?
3. Докажите, что если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°.
4. Докажите признак параллельности прямых.
5. Объясните, какие углы называются соответственными. Докажите, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то соответственные углы тоже равны, и наоборот.
6. Докажите, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на этой прямой?

7. Докажите, что если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
8. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
9. Докажите, что сумма углов треугольника равна 180°.
10. Докажите, что у любого треугольника по крайней мере два угла острые.
11. Что такое внешний угол треугольника?
12. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
13. Докажите, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
14. Какой треугольник называется прямоугольным (остроугольным, тупоугольным)?
15. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
16. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой? Какие стороны называются катетами?
17. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.
18. Докажите, что из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.
19. Что называется расстоянием от точки до прямой?
20. Объясните, что такое расстояние между параллельными прямыми.

Задачи

Пункт 29

1. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Докажите, что если две прямые пересекаются, то любая третья прямая пересекает по крайней мере одну из этих прямых.
3. Дано: $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Докажите, что $a \parallel d$.
4. Прямые AB и CD параллельны. Докажите, что если отрезок BC пересекает прямую AD, то точка пересечения принадлежит отрезку AD (см. рис. 70).

Пункт 30

5. Дан треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка B_1, а на стороне AC — точка C_1. Назовите внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы при прямых AB, AC и секущей B_1C_1.

6. Назовите внутренние накрест лежащие и внутренние односторонние углы на рисунке 72.
7. Отрезки AD и BC пересекаются. Для прямых AC и BD и секущей BC назовите пару внутренних накрест лежащих углов. Для тех же прямых и секущей AB назовите пару внутренних односторонних углов. Объясните ответ.

Пункт 31

8. Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.
9. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E и делятся этой точкой пополам. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
10. Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

Пункт 32

11. Угол ABC равен 80°, а угол BCD равен 120°. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Обоснуйте ответ.
12. Прямые AC и BD параллельны, причём точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC (см. рис. 77). Докажите, что: 1) углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие относительно секущей BC; 2) луч BC проходит между сторонами угла ABD; 3) углы CAB и DBA внутренние односторонние относительно секущей AB.
13. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.
14. 1) Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 30°. Найдите эти углы. 2) Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна 150°. Чему равны эти углы?
15. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72°. Найдите остальные семь углов.
16. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 30°. Может ли один из остальных семи углов равняться 70°? Объясните ответ.
17. Докажите, что две прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

Пункт 33

18. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два угла равны: 1) 50° и 30°; 2) 40° и 75°; 3) 65° и 80°; 4) 25° и 120°.

19. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

20. Может ли в треугольнике быть: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) два прямых угла?

21. Может ли быть тупым угол при основании равнобедренного треугольника?

22. Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.

23. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол между боковыми сторонами равен: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.

24. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы.

25. Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные углы. Сколько решений имеет задача?

26. Докажите, что если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, то этот треугольник равносторонний.

27. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* проведена биссектриса *CD*. Найдите углы треугольника *ABC*, если угол *ADC* равен: 1) 60°; 2) 75°; 3) α.

28. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* и углом при вершине *B*, равным 36°, проведена биссектриса *AD*. Докажите, что треугольники *CDA* и *ADB* равнобедренные (рис. 88).

29. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы из вершин *A* и *B*. Точка их пересечения обозначена *D*. Найдите угол *ADB*, если: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$.

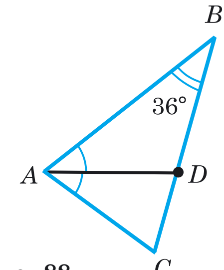


Рис. 88

30. Чему равны углы равностороннего треугольника?

31. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

Пункт 34

32. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите углы треугольника.

33. Найдите углы треугольника, зная, что внешние углы при двух его вершинах равны 120° и 150°.

34. Два внешних угла треугольника равны 100° и 150°. Найдите третий внешний угол.

35. В треугольнике *ABC* проведена высота *CD*. Какая из трёх точек *A*, *B*, *D* лежит между двумя другими, если углы *A* и *B* треугольника острые?

36. В треугольнике *ABC* проведена высота *CD*. Какая из трёх точек *A*, *B*, *D* лежит между двумя другими, если угол *A* тупой? Обоснуйте ответ.

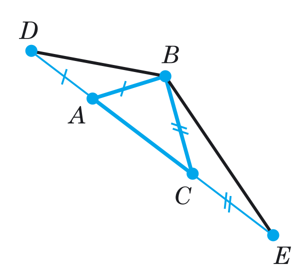


Рис. 89

37. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

38. Сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах A и B, взятых по одному для каждой вершины, равна $240°$. Чему равен угол C треугольника?

39. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC отложены отрезки $AD = AB$ и $CE = CB$ (рис. 89). Как найти углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC?

40. У треугольника один из внутренних углов равен $30°$, а один из внешних — $40°$. Найдите остальные внутренние углы треугольника.

Пункт 35

41. Из вершины прямого угла треугольника ABC проведена высота BD. Найдите угол CBD, зная, что: 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$.

42. Из вершины тупого угла B треугольника ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольников ABD и CBD, зная, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

43. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом $30°$ катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

44. Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.

45. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABD.

46. Высоты треугольника ABC, проведённые из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.

47. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

48. Докажите, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Пункт 36

49. Прямая a пересекает отрезок BC в середине. Докажите, что точки B и C находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

50. Отрезок BC пересекает прямую a в точке O. Расстояния от точек B и C до прямой a равны. Докажите, что точка O является серединой отрезка BC.

51. Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

52. Докажите, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до прямых, содержащих противолежащие им стороны, равны.



§ 5 Геометрические построения

38 Окружность

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется **центром** окружности.

Расстояние от точек окружности до её центра называется **радиусом** окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром (рис. 90).

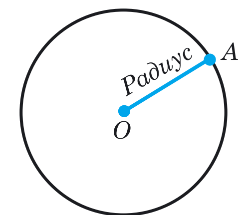


Рис. 90

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр, называется **диаметром**. На рисунке 91 BC — хорда, AD — диаметр.

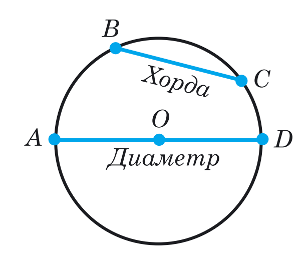


Рис. 91

Задача (3). Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен хорде.

Решение.

Пусть AB — хорда окружности и C — её середина (рис. 92).

Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB. У него стороны OA и OB равны как радиусы окружности.

По свойству медианы равнобедренного треугольника, проведённой к основанию, отрезок OC является высотой.

Поэтому диаметр окружности, проведённый через середину хорды, перпендикулярен хорде.

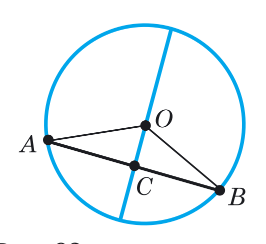


Рис. 92







39 Окружность, описанная около треугольника

Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 5.1

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведённых через середины этих сторон.

Доказательство.

Пусть ABC — данный треугольник и O — центр описанной около него окружности (рис. 93). Треугольник AOC равнобедренный: у него стороны OA и OC равны как радиусы. Медиана OD этого треугольника одновременно является его высотой. Поэтому центр окружности лежит на прямой, перпендикулярной стороне AC и проходящей через её середину. Точно так же доказывается, что центр окружности лежит на перпендикулярах к двум другим сторонам треугольника. Теорема доказана.

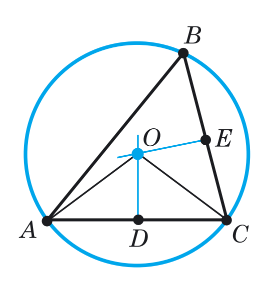


Рис. 93

Замечание.

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, часто называют **серединным перпендикуляром**. В связи с этим иногда говорят, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Задача (6). Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.

Решение.

Пусть ABC — треугольник и a, b — серединные перпендикуляры к его сторонам AC и BC (рис. 94). Допустим, прямые a и b не пересекаются, а значит, параллельны. Прямая AC перпендикулярна прямой a. Прямая BC перпендикулярна прямой b, а значит, и прямой a, так как прямые a и b параллельны. Таким образом, обе прямые AC и BC перпендикулярны прямой a, а значит, параллельны. Но это неверно. Прямые AC и BC пересекаются в точке C. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

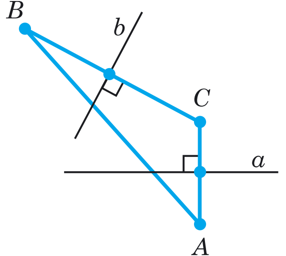


Рис. 94

40 Касательная к окружности

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется **касательной**. При этом данная точка окружности называется **точкой касания**.

На рисунке 95 прямая a проведена через точку окружности A перпендикулярно к радиусу OA. Прямая a является касательной к окружности. Точка A является точкой касания. Можно сказать также, что окружность касается прямой a в точке A.

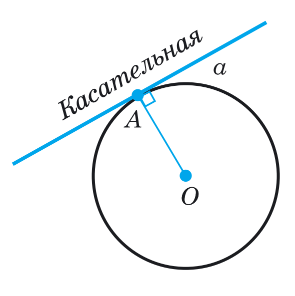


Рис. 95

Задача (8). Докажите, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.

Решение.

Пусть a — касательная к окружности в точке A (рис. 96). Допустим, касательная и окружность имеют, кроме точки A, общую точку B, отличную от A. Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB. У него боковые стороны OA и OB — радиусы окружности. Так как у равнобедренного треугольника углы при основании равны, а угол при вершине A прямой, то у этого треугольника два прямых угла. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

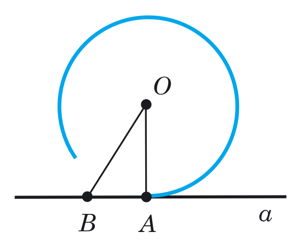
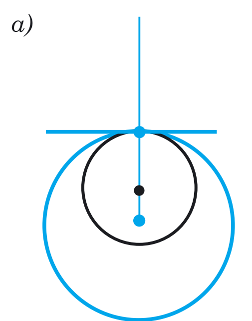


Рис. 96

Две окружности, имеющие общую точку, **касаются** в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную (рис. 97). Касание окружностей называется **внутренним**, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 97, *а*). Касание окружностей называется **внешним**, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 97, *б*).



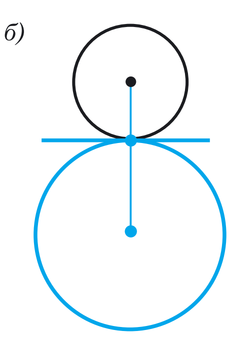
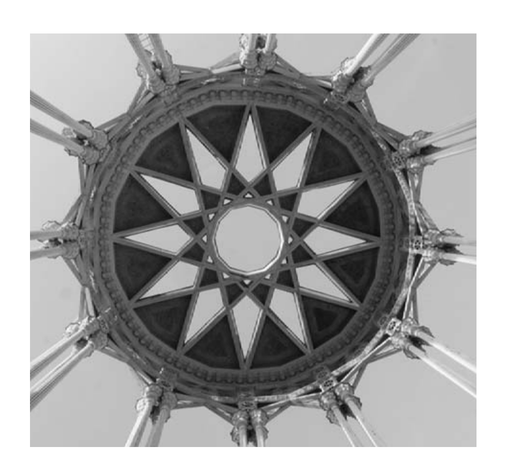


Рис. 97



41 Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема 5.2

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Доказательство.

Пусть ABC — данный треугольник, O — центр вписанной в него окружности, D, E и F — точки касания окружности со сторонами (рис. 98).

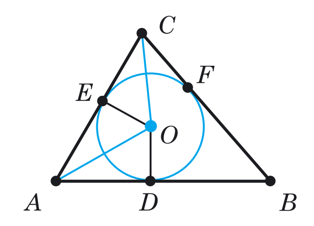


Рис. 98

Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза AO общая, а катеты OD и OE равны как радиусы. Из равенства треугольников следует равенство углов OAD и OAE. А это значит, что точка O лежит на биссектрисе треугольника, проведённой из вершины A.

Точно так же доказывается, что точка O лежит на двух других биссектрисах треугольника. Теорема доказана.

Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон, называется **вневписанной окружностью** (рис. 99). Таких окружностей для любого треугольника может быть три.

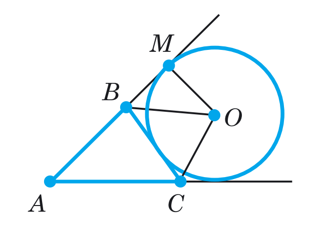
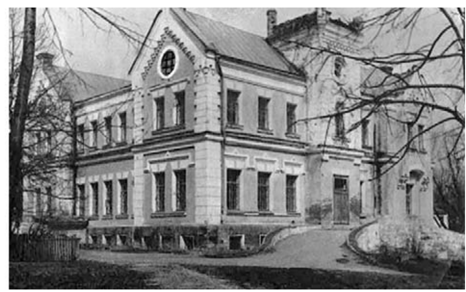


Рис. 99

Чтобы построить их, проводят биссектрисы внешних углов треугольника ABC и точки их пересечения берут за центры. Центром окружности, вписанной в угол A на рисунке 99, является точка O пересечения биссектрис BO и CO внешних углов треугольника ABC, не смежных с углом A. Радиусом этой окружности является перпендикуляр OM, опущенный на прямую AB.





42 Что такое задачи на построение

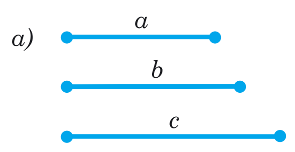
В задачах на построение идёт речь о построении геометрической фигуры с помощью данных чертёжных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль.

Решение задачи состоит не в построении фигуры, а в том, как это сделать, и соответствующем доказательстве.

Задача считается решённой, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

С помощью линейки как инструмента геометрических построений можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнять линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки. Рассмотрим простейшие задачи на построение.



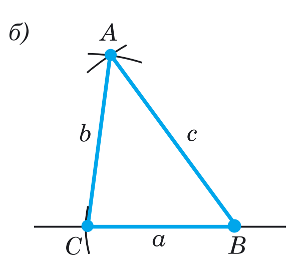


Рис. 100

43 Построение треугольника с данными сторонами

Задача 5.1. Построить треугольник с данными сторонами a, b, c (рис. 100, *а*).

Решение.

С помощью линейки проводим произвольную прямую и отмечаем на ней произвольную точку B (рис. 100, *б*). Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка её пересечения с прямой.

Теперь раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, описываем окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Проведём отрезки AB и AC. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

44 Построение угла, равного данному

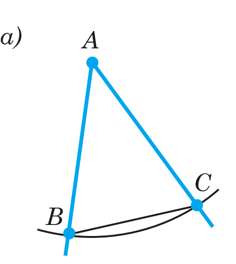
Задача 5.2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

Решение.

Проведём произвольную окружность с центром в вершине A данного угла (рис. 101, *а*). Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла.

Радиусом AB проведём окружность с центром в точке O — начальной точке данной полупрямой (рис. 101, *б*). Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B_1. Опишем окружность с центром B_1 и радиусом BC. Точка C_1 пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Для доказательства достаточно заметить, что треугольники ABC и OB_1C_1 равны как треугольники с соответственно равными сторонами. Углы A и O являются соответствующими углами этих треугольников.



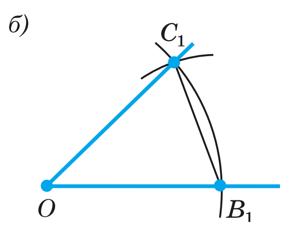


Рис. 101

45 Построение биссектрисы угла

Задача 5.3. Построить биссектрису угла.

Решение.

Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 102). Пусть B и C — точки её пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Проводим полупрямую AD.

Луч AD является биссектрисой, так как делит угол BAC пополам. Это следует из равенства треугольников ABD и ACD, у которых углы DAB и DAC являются соответствующими.

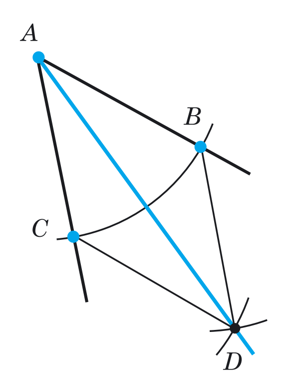


Рис. 102

46 Деление отрезка пополам

Задача 5.4. Разделить отрезок пополам.

Решение.

Пусть AB — данный отрезок (рис. 103). Из точек A и B радиусом AB описываем окружности. Пусть C и C_1 — точки пересечения этих окружностей. Они лежат в разных полуплоскостях относительно

прямой AB. Отрезок CC_1 пересекает прямую AB в некоторой точке O. Эта точка есть середина отрезка AB.

Действительно, треугольники CAC_1 и CBC_1 равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует равенство углов ACO и BCO. Треугольники ACO и BCO равны по первому признаку равенства треугольников. Стороны AO и BO этих треугольников являются соответствующими, а поэтому они равны. Таким образом, O — середина отрезка AB.

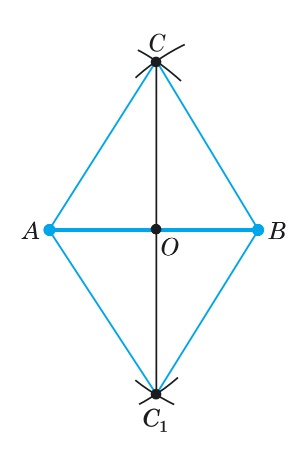


Рис. 103

47 Построение перпендикулярной прямой

Задача 5.5. Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

Решение.

Возможны два случая: 1) точка O лежит на прямой a; 2) точка O не лежит на прямой a.

Рассмотрим первый случай (рис. 104, *а*).

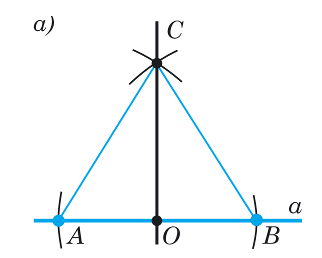
Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую a в двух точках: A и B. Из точек A и B проводим окружности радиусом AB. Пусть C — точка их пересечения. Искомая прямая проходит через точки O и C.

Перпендикулярность прямых OC и AB следует из равенства углов при вершине O треугольников ACO и BCO. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Рассмотрим второй случай (рис. 104, *б*).

Из точки O проводим окружность, пересекающую прямую a. Пусть A и B — точки её пересечения с прямой a. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1 — точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O. Искомая прямая проходит через точки O и O_1. Докажем это.

Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO_1. Треугольники AOB и AO_1B равны по третьему признаку. Поэтому угол OAC равен углу O_1AC. А тогда треугольники OAC и O_1AC равны по первому признаку. Значит, их углы ACO и ACO_1 равны. А так как они смежные, то они прямые. Таким образом, OC — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a.



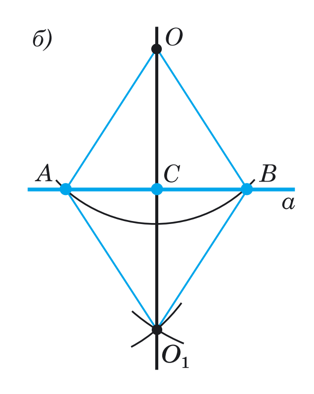


Рис. 104

48 Геометрическое место точек

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест.

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки. Важное геометрическое место точек даёт следующая теорема:

Теорема 5.3

Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

Доказательство.

Пусть A и B — данные точки, a — прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 105). Докажем, что:

1) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; 2) каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

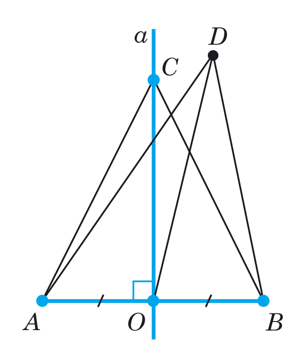


Рис. 105

То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O — середина отрезка AB.

Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a. Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$. В нём DO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведённая к основанию, является высотой. Значит, точка D лежит на прямой a. Теорема доказана.

Задача (43). Докажите, что: 1) около любого треугольника можно описать окружность, и только одну; 2) в любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Решение.

1) Обозначим через O точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AC и BC данного треугольника (см. рис. 93). По теореме о геометрическом месте точек, равноудалённых от двух

данных точек, точка O равноудалена как от вершин A и C, так и от вершин B и C. Значит, она равноудалена от всех вершин треугольника, причём точка O лежит и на серединном перпендикуляре к стороне AC. Поэтому около любого треугольника можно описать окружность. А поскольку серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются только в одной точке, то описанная окружность единственная. 2) Доказательство второго утверждения следует из решения задачи 48 (п. 35).

Замечание.

Ранее было установлено (п. 35), что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, а теперь видим, что все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника также пересекаются в одной точке. Первая точка пересечения является центром окружности, вписанной в треугольник, а вторая — центром окружности, описанной около треугольника.

49 Метод геометрических мест

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем.

Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X. Приведём пример.

Задача (45). Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Решение.

Искомая точка X удовлетворяет двум следующим условиям:
1) она одинаково удалена от точек A и B;
2) она находится на данном расстоянии от точки C.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (рис. 106).

Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C. Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест.

Рис. 106

Контрольные вопросы

1. Что такое окружность, центр окружности, радиус?
2. Что такое хорда окружности? Какая хорда называется диаметром?
3. Какая окружность называется описанной около треугольника?
4. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
5. Какая прямая называется касательной к окружности?
6. Что значит: окружности касаются в данной точке?
7. Какое касание окружностей называется внешним, какое — внутренним?
8. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
9. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.
10. Объясните, как построить треугольник по трём сторонам.
11. Объясните, как отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.
12. Объясните, как разделить данный угол пополам.
13. Объясните, как разделить отрезок пополам.
14. Объясните, как через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.
15. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек?
16. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 43—60)? Приведите свои примеры геометрических фигур.

Задачи

Пункт 38

1. Докажите, что любой луч, исходящий из центра окружности, пересекает окружность в одной точке.
2. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, пересекает окружность в двух точках.

3. Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен хорде.
4. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 3.
5. 1) Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними (рис. 107).
2) Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.

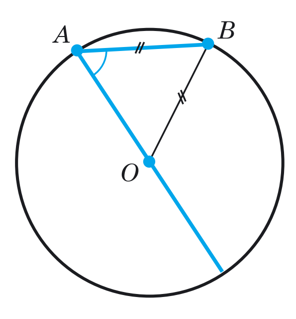


Рис. 107

Пункт 39

6. Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются.
7. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

Пункт 40

8. 1) Может ли окружность касаться прямой в двух точках? Объясните ответ.
2) Докажите, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.
9. Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?
10. Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.
11. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касаний.
12. Могут ли касаться окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между центрами равно 60 см?
13. 1) Точки A, B, C лежат на прямой, а точка O — вне прямой. Могут ли два треугольника AOB и BOC быть равнобедренными с основаниями AB и BC? Обоснуйте ответ.
2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?
14. 1) Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой OO_1.
2) Докажите, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.
15. 1) Через точку A окружности с центром O проведена прямая, не касающаяся окружности. OB — перпендикуляр, опущенный на данную прямую. На продолжении отрезка AB отложен отрезок BC, равный отрезку AB. Докажите, что точка C лежит на окружности.

2) Докажите, что если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности в этой точке.
3) Докажите, что если две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются в этой точке.

16. 1) Из одной точки проведены две касательные к окружности (рис. 108). Докажите, что отрезки касательных MP и MQ равны.
2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.

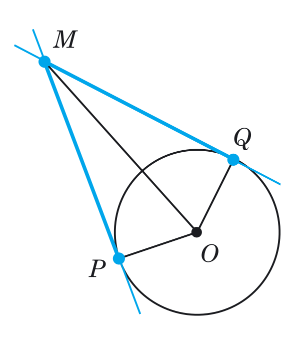


Рис. 108

Пункт 41

17. Одна окружность описана около равностороннего треугольника, а другая вписана в него. Докажите, что центры этих окружностей совпадают.

18. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 109). Докажите, что

$$AC_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

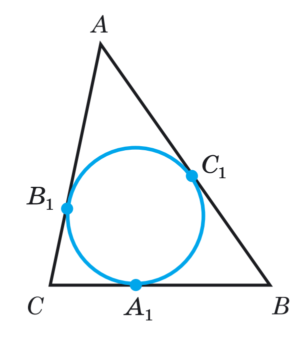


Рис. 109

19. Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Пункт 43

20. Постройте треугольник по трём сторонам a, b и c:
1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см;
3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

21. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

22. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

Пункт 44

23. Постройте треугольник ABC по следующим данным:
1) по двум сторонам и углу между ними:
а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40^\circ$;
б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70^\circ$;

2) по стороне и прилежащим к ней углам:
а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;
б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

24. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них:
1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.

25. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.

Пункт 45

26. Разделите угол на четыре равные части.

27. Постройте углы 60° и 30°.

Пункт 46

28. Дан треугольник. Постройте его медианы.

29. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них.

30. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

31. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне (рис. 110).

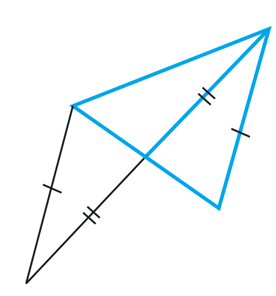


Рис. 110

Пункт 47

32. Дан треугольник. Постройте его высоты.

33. Постройте окружность, вписанную в данный треугольник.

34. Постройте окружность, описанную около треугольника.

35. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

36. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на основание.

37. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.

38. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

39. Постройте треугольник по стороне и проведённым к ней медиане и высоте.

40. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

Пункт 48

41. Докажите, что геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от неё на расстояние h.

42. На данной прямой найдите точку, которая находится на данном расстоянии от другой данной прямой.

43. Докажите, что: 1) около любого треугольника можно описать окружность, и только одну; 2) в любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

44. Докажите, что: 1) прямые, содержащие высоты данного треугольника, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины данного треугольника параллельно соответствующим противолежащим сторонам; 2) все три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Пункт 49

45. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

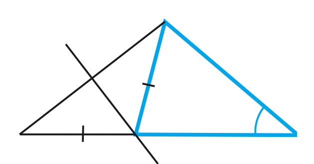


Рис. 111

46. На данной прямой найдите точку, равноудалённую от двух данных точек.

47. Даны четыре точки: A, B, C, D. Найдите точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и одинаково удалена от точек C и D.

48. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон (рис. 111).

49. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

50. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

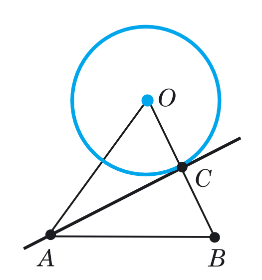


Рис. 112

51. 1) Из точки A к окружности с центром O и радиусом R проведена касательная (рис. 112). Докажите, что точка C касания лежит на основании равнобедренного треугольника OAB, у которого $OA = AB$, $OB = 2R$.

2) Проведите касательную к окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

52. Проведите общую касательную к двум данным окружностям (рис. 113).

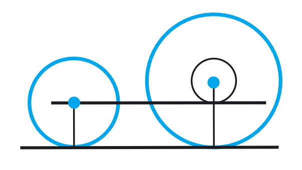
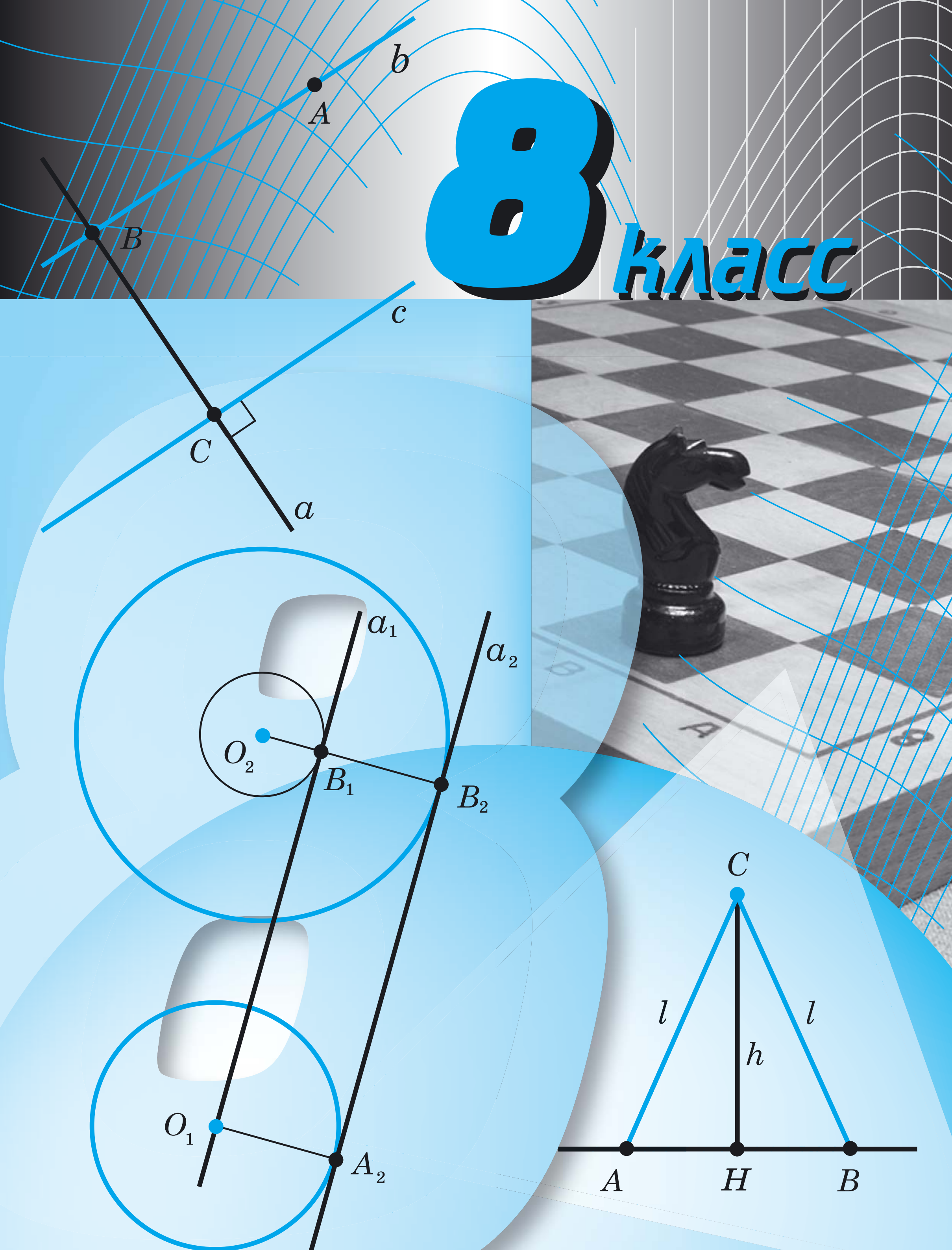


Рис. 113

53. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.


8 класс
b
A
B
c
C
a
a_1
a_2
O_2
B_1
B_2
O_1
A_2
C
l
l
h
A
H
B



Четырёхугольники

50 Определение четырёхугольника

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются **вершинами** четырёхугольника, а соединяющие их отрезки — **сторонами** четырёхугольника.

Четырёхугольник называется **вписанным**, если все его вершины лежат на некоторой окружности, и **описанным**, если все его стороны касаются некоторой окружности.

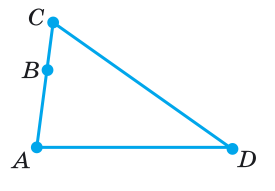


Рис. 114

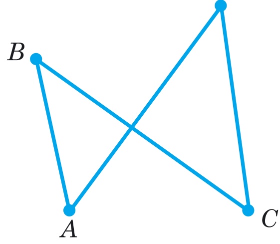


Рис. 115

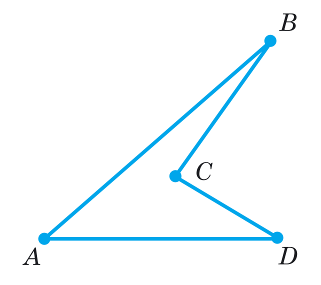


Рис. 116

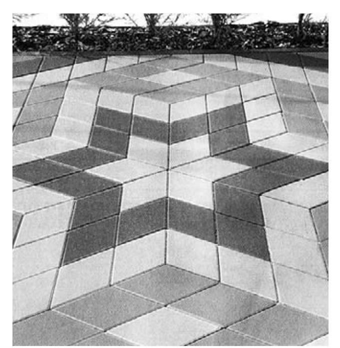
Задача (1). На рисунках 114—116 представлены 3 фигуры, каждая из которых состоит из 4 точек и 4 последовательно соединяющих их отрезков. Какая из этих фигур является четырёхугольником?

Решение.

Четырёхугольником является только фигура на рисунке 116, так как у фигуры на рисунке 114 точки A, B, C лежат на одной прямой, а у фигуры на рисунке 115 отрезки BC и AD пересекаются.

Вершины четырёхугольника называются **соседними**, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются **противолежащими**. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырёхугольника, называются **диагоналями**.







У четырёхугольника на рисунке 117 диагоналями являются отрезки AC и BD.

Стороны четырёхугольника, исходящие из одной вершины, называются **соседними** сторонами. Стороны, не имеющие общего конца, называются **противолежащими** сторонами.

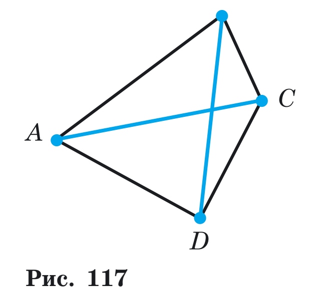


Рис. 117

У четырёхугольника на рисунке 117 противолежащими являются стороны AB и CD, BC и AD.

Четырёхугольник обозначается указанием его вершин. Например, четырёхугольник на рисунке 117 обозначается $ABCD$. В обозначении четырёхугольника рядом стоящие вершины должны быть соседними. Четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 117 можно также обозначить $BCDA$ или $DCBA$. Но нельзя обозначить $ABDC$ (B и D — не соседние вершины).

Сумма длин всех сторон четырёхугольника называется **периметром**.

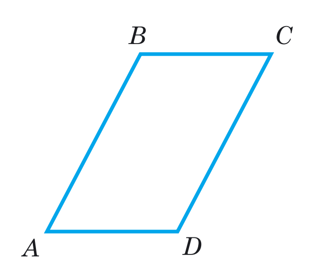


Рис. 118

51 Параллелограмм

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 118).

Теорема 6.1

Если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник и O — точка пересечения его диагоналей (рис. 119). Треугольники AOD и COB равны. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OD = OB$ и $OA = OC$ по условию теоремы.

Значит, углы OBC и ODA равны, а они являются внутренними накрест лежащими для прямых AD и BC и секущей BD. По признаку параллельности прямых прямые AD и BC параллельны. Так же доказывается параллельность прямых AB и CD с помощью равенства треугольников AOB и COD.

Так как противолежащие стороны четырёхугольника параллельны, то по определению этот четырёхугольник — параллелограмм. Теорема доказана.

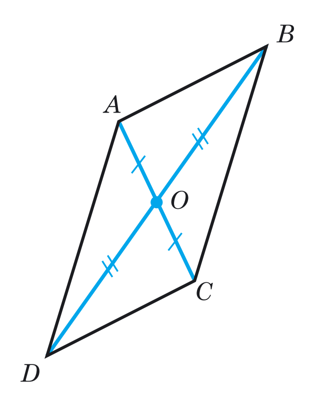


Рис. 119

52 Свойство диагоналей параллелограмма

Следующая теорема, обратная теореме 6.1.

Теорема 6.2

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 120). Проведём его диагональ BD. Отметим на ней середину O и на продолжении отрезка AO отложим отрезок OC_1, равный AO.

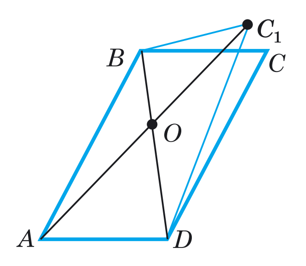
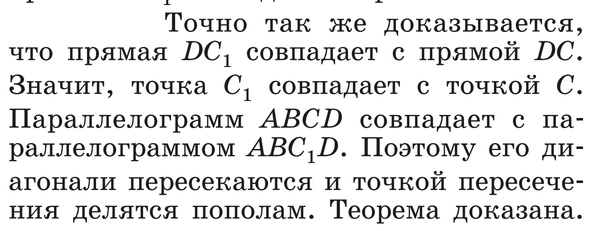


Рис. 120

По теореме 6.1 четырёхугольник ABC_1D есть параллелограмм. Следовательно, прямая BC_1 параллельна AD. Но через точку B можно провести только одну прямую, параллельную AD. Значит, прямая BC_1 совпадает с прямой BC.



Точно так же доказывается, что прямая DC_1 совпадает с прямой DC. Значит, точка C_1 совпадает с точкой C. Параллелограмм $ABCD$ совпадает с параллелограммом ABC_1D. Поэтому его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.



Задача (6). Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок её, заключённый между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и EF — прямая, пересекающая параллельные стороны AD и BC (рис. 121).

Треугольники OAE и OCF равны по второму признаку. У них стороны OA и OC равны, так как O — середина диагонали AC.

Углы при вершине O равны как вертикальные, а углы EAO и FCO равны как внутренние накрест лежащие при параллельных AD, BC и секущей AC.

Из равенства треугольников следует равенство сторон: $OE = OF$, что и требовалось доказать.

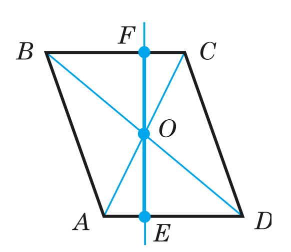


Рис. 121

53 Свойство противолежащих сторон и углов параллелограмма

Теорема 6.3

У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 122). Проведём диагонали параллелограмма. Пусть O — точка их пересечения.

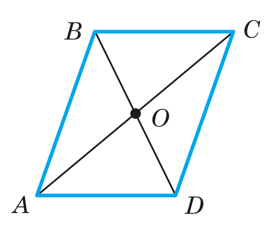
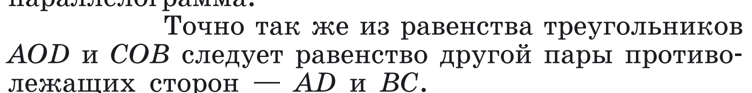
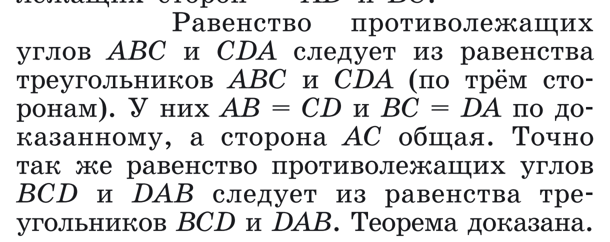


Рис. 122

Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OA = OC$ и $OB = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма.



Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолежащих сторон — AD и BC.



Равенство противолежащих углов ABC и CDA следует из равенства треугольников ABC и CDA (по трём сторонам). У них $AB = CD$ и $BC = DA$ по доказанному, а сторона AC общая. Точно так же равенство противолежащих углов BCD и DAB следует из равенства треугольников BCD и DAB. Теорема доказана.



Задача (18). Докажите, что если у четырёхугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, у которого стороны AB и CD параллельны и равны (рис. 123).

Проведём через вершину B прямую b, параллельную стороне AD. Эта прямая пересекает луч DC в некоторой точке C_1. Четырёхугольник ABC_1D есть параллелограмм. Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $C_1D = AB$. А по условию $AB = CD$. Значит, $DC = DC_1$. Отсюда следует, что точки C и C_1 совпадают.

Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ совпадает с параллелограммом ABC_1D, а значит, является параллелограммом.

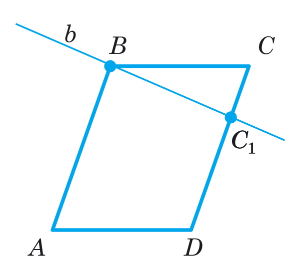


Рис. 123

54 Прямоугольник

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 124).

Теорема 6.4

Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (рис. 125). Утверждение теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников BAD и CDA. У них углы BAD и CDA прямые, катет AD общий, а катеты AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма. Из равенства треугольников следует, что их гипотенузы равны. А гипотенузы есть диагонали прямоугольника. Теорема доказана.

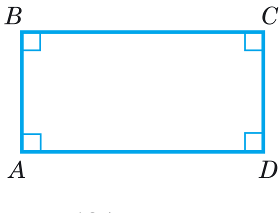


Рис. 124

Задача (24). Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

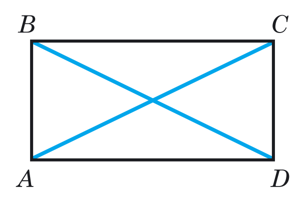


Рис. 125

Решение.

Углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне, являются внутренними односторонними (рис. 126), поэтому их сумма равна 180°. Так как по условию задачи эти углы равны, то каждый из них прямой. А параллелограмм, у которого все углы прямые, есть прямоугольник.



Рис. 126

55 Ромб

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 127).

Теорема 6.5

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данный ромб (см. рис. 127), O — точка пересечения его диагоналей. По свойству параллелограмма $AO = OC$. Значит, в треугольнике ABC отрезок BO является медианой. Так как $ABCD$ — ромб, то $AB = BC$ и треугольник ABC равнобедренный.

По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведённая к его основанию, является

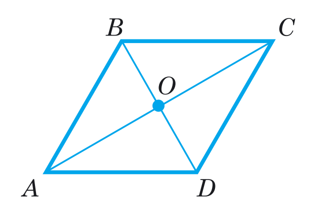


Рис. 127





биссектрисой и высотой. А это значит, что диагональ BD является биссектрисой угла B и перпендикулярна диагонали AC. Теорема доказана.

Задача (33). Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

Решение.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями и O — точка пересечения диагоналей (рис. 128).

Треугольники AOB и AOD равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O по условию прямые, сторона AO общая, а $OB = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма.

Из равенства треугольников следует равенство сторон $AB = AD$. А по свойству противолежащих сторон параллелограмма $AD = BC$, $AB = CD$.

Итак, все стороны параллелограмма равны, а значит, он является ромбом.

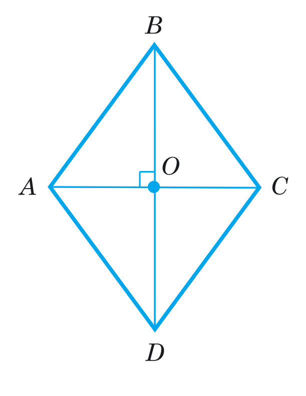


Рис. 128

56 Квадрат

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 129).

Так как стороны квадрата равны, то он является также ромбом. Поэтому квадрат обладает свойствами прямоугольника и ромба:

1. **У квадрата все углы прямые.**
2. **Диагонали квадрата равны.**
3. **Диагонали квадрата пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.**

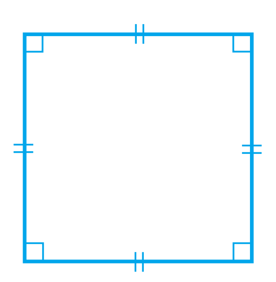


Рис. 129

Задача (40). Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он является квадратом.

Решение.

Так как прямоугольник есть параллелограмм, а параллелограмм с перпендикулярными диагоналями есть ромб (см. задачу 33), то у рассматриваемого прямоугольника все стороны равны (рис. 130). По определению такой прямоугольник является квадратом.

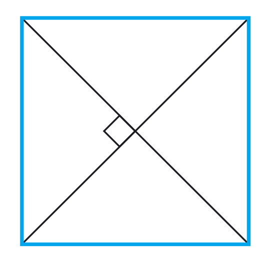


Рис. 130

57 Теорема Фалеса

Теорема 6.6

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство.

Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3 (рис. 131). Пусть B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

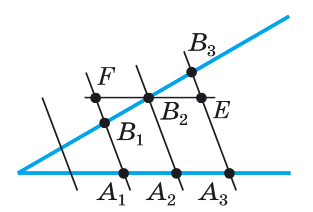


Рис. 131

Проведём через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3. По свойству параллелограмма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$.

И так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

Треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку. У них $B_2F = B_2E$ по доказанному. Углы при вершине B_2 равны как вертикальные, а углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF.

Из равенства треугольников следует равенство сторон: $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.



Фалес Милетский — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

Замечание.

В условии теоремы Фалеса вместо сторон угла можно взять любые две прямые, при этом заключение теоремы будет то же:

параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

Иногда теорема Фалеса будет применяться и в такой форме.

Задача (48). Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение.

Проведём из точки A полупрямую a, не лежащую на прямой AB (рис. 132). Отложим на полупрямой a равные отрезки: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Соединим точки A_n и B. Проведём через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} прямые, параллельные прямой A_nB. Они пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые делят отрезок AB на n равных отрезков (по теореме Фалеса).

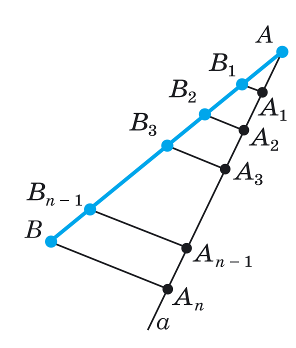


Рис. 132

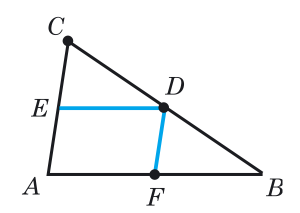


Рис. 133

58 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема 6.7

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Доказательство.

Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 133). Проведём через точку D прямую, параллельную стороне AB. По теореме Фалеса она пересекает отрезок AC в его середине, т. е. содержит среднюю линию DE. Значит, средняя линия DE параллельна стороне AB.

Проведём теперь среднюю линию DF. Она параллельна стороне AC. Четырёхугольник $AEDF$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $ED = AF$, а так как $AF = FB$ по теореме Фалеса, то

$$ED = \frac{1}{2}AB.$$

Теорема доказана.

Задача (55). Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.



Решение.

Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник и E, F, G, H — середины его сторон (рис. 134). Отрезок EF — средняя линия треугольника ABC. Поэтому $EF \parallel AC$. Отрезок GH — средняя линия треугольника ADC. Поэтому $GH \parallel AC$. Итак, $EF \parallel GH$, т. е. противолежащие стороны EF и GH четырёхугольника $EFGH$ параллельны. Точно так же доказывается параллельность другой пары противолежащих сторон. Значит, четырёхугольник $EFGH$ — параллелограмм.

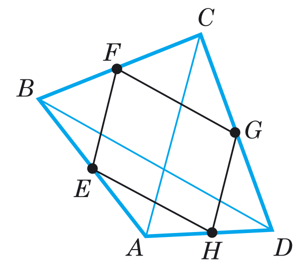


Рис. 134

59 Трапеция



Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются **основаниями** трапеции. Две другие стороны называются **боковыми** сторонами.

На рисунке 135 вы видите трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD и боковыми сторонами BC и AD.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобокой**. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией** трапеции.

Теорема 6.8

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 136). Проведём через вершину B и середину P боковой стороны CD прямую. Она пересекает прямую AD в некоторой точке E.

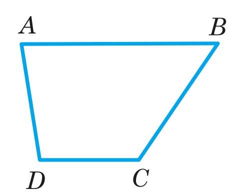


Рис. 135

Рис. 136



Треугольники PBC и PED равны по второму признаку равенства треугольников. У них $CP = DP$ по построению, углы при вершине P равны как вертикальные, а углы PCB и PDE равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $PB = PE$, $BC = ED$.



Значит, средняя линия PQ трапеции является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника $PQ \parallel AE$ и

$$PQ = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Теорема доказана.

Задача (60). Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

Решение.

Пусть $ABCD$ — равнобокая трапеция (рис. 137). Докажем, что углы трапеции при основании CD равны.

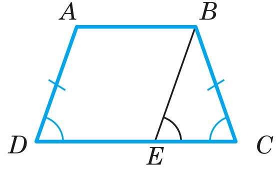


Рис. 137

Проведём через вершину B прямую, параллельную стороне AD. Она пересечёт луч DC в некоторой точке E. Четырёхугольник $ABED$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $BE = AD$. По условию $AD = BC$ (трапеция равнобокая), значит, треугольник BCE равнобедренный с основанием EC. Углы треугольника и трапеции при вершине C совпадают, а углы при вершинах E и D равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых секущей. Поэтому $\angle ADC = \angle BCD$. Утверждение доказано.

60 Пропорциональные отрезки

Теорема 6.9

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

Доказательство.

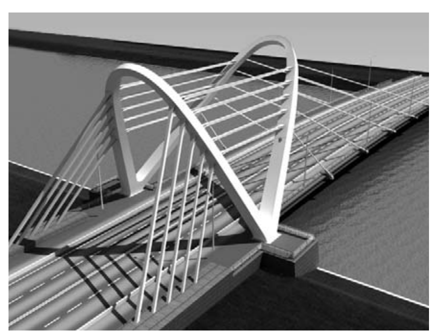
Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и B_1, C_1 соответственно (рис. 138). Теоремой утверждается, что

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}. \qquad (*)$$

Рис. 138

Докажем сначала равенство (*) в случае, когда существует такой отрезок длины δ, который укладывается целое число раз и на отрезке AC, и на отрезке AC_1. Пусть $AC = n\delta$, $AC_1 = m\delta$ и $n > m$. Разобьём отрезок AC на n равных частей (длины δ). При этом точка C_1 будет одной из точек деления. Проведём через точки деления прямые, параллельные прямой BC. По теореме Фалеса эти прямые разбивают отрезок AB на равные отрезки некоторой длины δ_1. Имеем

$$AB = n\delta_1, \quad AB_1 = m\delta_1.$$



Мы видим, что

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n}.$$

Значит,

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB},$$

что и требовалось доказать.

Докажем теорему в общем случае (не для запоминания). Допустим, что $\frac{AC_1}{AC} \neq \frac{AB_1}{AB}$, например, что $\frac{AC_1}{AC} > \frac{AB_1}{AB}$.

Отложим на луче AC отрезок $AC_2 = \frac{AC}{AB} + AB_1$ (рис. 139). При этом $AC_2 < AB_1$. Разобьём отрезок AC на большое число n равных частей и проведём через точки деления прямые, параллельные BC.

При достаточно большом n на отрезке C_1C_2 будут точки деления. Обозначим одну из них через Y, а соответствующую точку на отрезке AB_1 через X. По доказанному

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

Заменим в этом равенстве величину AY меньшей величиной AC_2, а величину AX большей величиной AB_1. Получим

$$\frac{AC_2}{AC} < \frac{AB_1}{AB}.$$

Отсюда $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$.

Рис. 139

Но $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача 6.1. Даны отрезки a, b и c. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$.

Решение.

Строим любой неразвёрнутый угол с вершиной O (рис. 140). Откладываем на одной стороне угла отрезки $OA = a$ и $OB = b$, а на другой стороне отрезок $OC = c$. Соединяем точки A и C прямой и проводим параллельную ей прямую BD через точку B. Отрезок $OD = x$.

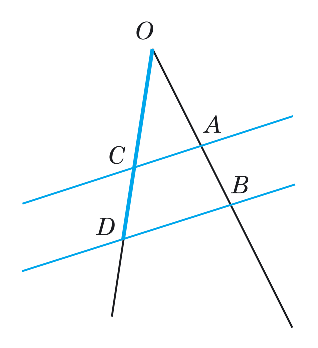


Рис. 140

Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Отсюда

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Таким образом, отрезок OD есть искомый отрезок x.

Замечание.

Построенный отрезок x называется **четвёртым пропорциональным**. Это название связано с тем, что он является четвёртым членом пропорции $a : b = c : x$.

61 Замечательные точки в треугольнике

В решении задачи 48 к § 4 доказано, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, а в решении задачи 43 к § 5 доказано, что все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, из утверждения задачи 44 к § 5 следует, что все три прямые, содержащие высоты к сторонам треугольника, тоже пересекаются в одной точке. Наряду с этими тремя точками имеется ещё одна замечательная точка в треугольнике.

Задача (74). 1) Докажите, что любые две медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

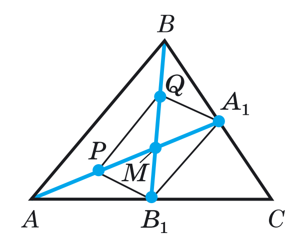


Рис. 141

Решение.

Проведём в треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке M (рис. 141). Пусть PQ — средняя линия треугольника AMB, параллельная стороне AB. Четырёхугольник A_1B_1PQ является параллелограммом, так как его стороны A_1B_1 и PQ параллельны и равны. Они параллельны и равны как средние линии треугольников ACB и AMB, параллельные их общей стороне AB и равные её половине по свойству средней линии треугольника. Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $A_1M = MP$. И так как по построению точка P — середина AM, то получается, что точка M пересечения медиан делит медиану AA_1 в отношении $2:1$, считая от вершины A.

Медиану BB_1 точка M делит в таком же отношении. То же самое верно и для третьей медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C. А значит, третья медиана треугольника ABC проходит через точку M, т. е. все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

С четырьмя замечательными точками в треугольнике связано ещё одно свойство. Будем называть точку пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, **ортоцентром** треугольника. Окружность, описанную около треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника, называют **окружностью Эйлера**[1]. Окружность Эйлера называют ещё окружностью девяти точек. Действительно докажем, что **середины сторон треугольника, середины отрезков, соединяющих его ортоцентр с вершинами, и основания высот треугольника лежат на одной окружности.**

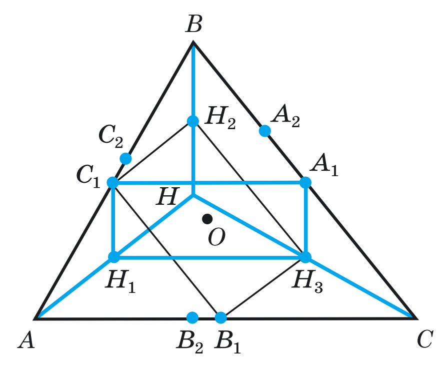


Рис. 142

Пусть дан треугольник ABC и пусть A_1, B_1, C_1 — середины его сторон,

[1] Леонард Эйлер (1707—1783) — математик, жизнь и деятельность которого были неразрывно связаны с Петербургской академией наук.

A_2, B_2, C_2 — основания высот и H_1, H_2, H_3 — середины отрезков, соединяющих его ортоцентр H с вершинами треугольника (рис. 142).

Четырёхугольник $C_1B_1H_3H_2$ — параллелограмм (так как его стороны C_1H_2 и B_1H_3 параллельны как параллельные одной и той же прямой AH, а стороны C_1B_1 и H_2H_3 параллельны как параллельные одной и той же прямой BC). Более того, параллелограмм $C_1B_1H_3H_2$ является прямоугольником, так как $AH \perp BC$. Аналогично доказывается, что четырёхугольник $C_1H_1H_3A_1$ также является прямоугольником. А значит, отрезки A_1H_1, B_1H_2 и C_1H_3 равны друг другу (по свойству диагоналей прямоугольника) и пересекаются в одной точке O, которая является их общей серединой. Следовательно, середины сторон данного треугольника и середины отрезков, соединяющих его ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности с центром O, являющейся по определению окружностью Эйлера.

На этой окружности лежит и основание высоты AA_2, так как углы $A_1A_2H_1$ и $A_1C_1H_1$ — прямые, и поэтому их вершины лежат на одной окружности с диаметром A_1H_1. Аналогично доказывается, что основания высот BB_2 и CC_2 тоже лежат на этой окружности, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется четырёхугольником?
2. Какие вершины четырёхугольника называются соседними, какие — противолежащими?
3. Что такое диагонали четырёхугольника?
4. Какие стороны четырёхугольника называются соседними? Какие называются противолежащими?
5. Как обозначается четырёхугольник?
6. Что такое параллелограмм?
7. Докажите, что если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.
8. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
9. Докажите, что у параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.
10. Что такое прямоугольник?
11. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

12. Что такое ромб?
13. Докажите, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом; диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
14. Что такое квадрат? Перечислите свойства квадрата.
15. Докажите теорему Фалеса.
16. Докажите, что средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны.
17. Какой четырёхугольник называется трапецией?
18. Какая трапеция называется равнобокой?
19. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований.
20. Докажите теорему о пропорциональных отрезках.
21. Что такое ортоцентр треугольника и окружность Эйлера?
22. Докажите, что середины сторон треугольника, середины отрезков, соединяющих его ортоцентр с вершинами, и основания высот треугольника лежат на окружности Эйлера.
23. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 72—82)? Приведите свои примеры геометрических фигур.

Задачи

Пункт 50

1. На рисунках 114—116 представлены три фигуры, каждая из которых состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. Какая из фигур является четырёхугольником?
2. Постройте какой-нибудь четырёхугольник $PQRS$. Укажите его противолежащие стороны и вершины.
3. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трёх заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их.
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.
5. Докажите, что у четырёхугольника, описанного около окружности, суммы противолежащих сторон равны.

Пункт 52

6. 1) Расстояния от точки пересечения диагоналей параллелограмма до двух его вершин равны 3 см и 4 см. Чему равны расстояния от неё до двух других вершин? Объясните ответ.
2) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок, заключённый между параллельными сторонами, делится этой точкой пополам.
7. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей

проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 2$ м и $AF = 2,8$ м. Найдите стороны BC и AD.

Пункт 53

8. У параллелограмма $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 15$ см. Чему равны стороны AD и CD? Объясните ответ.
9. У параллелограмма $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$. Чему равны углы B, C, D? Объясните ответ.
10. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 10 см. Найдите длину диагонали BD, если периметр треугольника ABD равен 8 см.
11. Один из углов параллелограмма равен 40°. Найдите остальные углы.
12. Найдите углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.
13. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой — 50°?
14. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.
15. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
16. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
17. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Докажите, что четырёхугольник $BEDF$ — параллелограмм.
18. Докажите, что если у четырёхугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.
19. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Чему равны отрезки BE и EC, если $AB = 9$ см, $AD = 15$ см?
20. Две стороны параллелограмма относятся как 3:4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны.
21. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит её пополам. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD равен 3 м.
22. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и диагонали; 2) по стороне и двум диагоналям.
23. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и углу; 2) по диагоналям и углу между ними.

Пункт 54

24. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

25. Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.

26. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.

27. Бетонная плита с прямолинейными краями должна иметь форму прямоугольника. Как при помощи бечёвки проверить правильность формы плиты?

28. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.

29. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей. Периметр прямоугольника 56 см. Найдите стороны прямоугольника.

30. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите их длины.

31. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол (рис. 143). Найдите периметр прямоугольника.

32. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах (рис. 144). Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?

Пункт 55

33. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

34. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.

35. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4:5. Найдите углы ромба.

36. Докажите, что четырёхугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

37. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.

38. Постройте ромб: 1) по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла; 2) по диагонали и противолежащему углу.

39. Постройте ромб: 1) по стороне и диагонали; 2) по двум диагоналям.

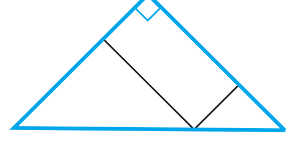


Рис. 143

Пункт 56

40. Докажите, что если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он является квадратом.

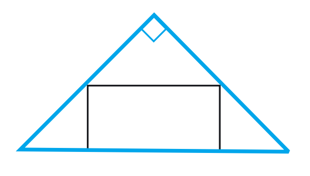


Рис. 144

41. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата.

42. На каждой стороне квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат (рис. 145).

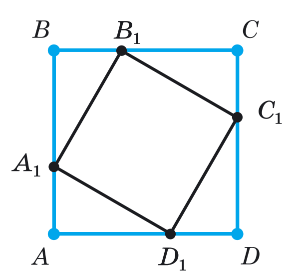


Рис. 145

43. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего.

44. Дан квадрат, сторона которого 1 м, диагональ его равна стороне другого квадрата. Найдите диагональ последнего.

45. В квадрат (рис. 146) вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите стороны прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.

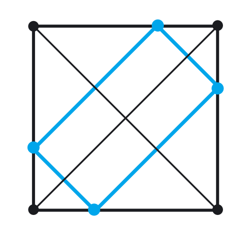


Рис. 146

46. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Найдите сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м.

47. Из данной точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные, радиус окружности 10 см. Найдите длины касательных (расстояние от данной точки до точки касания).

Пункт 57

48. Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

49. Разделите данный отрезок на указанное число равных частей: 1) 3; 2) 5; 3) 6.

Пункт 58

50. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

51. Периметр треугольника равен 12 см, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника.

52. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

53. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?

54. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, проходящей через середины двух его сторон.

55. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

56. Найдите стороны параллелограмма из предыдущей задачи, если известно, что диагонали четырёхугольника равны 10 м и 12 м.

57. У четырёхугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

58. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Пункт 59

59. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Найдите длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м.

60. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

61. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?

62. В равнобокой трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.

63. В равнобокой трапеции высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 см и 30 см. Найдите основания трапеции.

64. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 147). Найдите углы трапеции.

65. По одну сторону от прямой a даны две точки A и B на расстояниях 10 м и 20 м от неё. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

66. По разные стороны от прямой a даны две точки A и B на расстояниях 10 см и 4 см от неё. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой a.

67. Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.

68. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на 1,6 м и 0,6 м. Найдите длину диаметра.

69. Средняя линия трапеции 7 см, а одно из её оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.

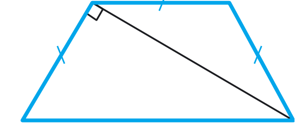


Рис. 147

70. Высота, проведённая из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины a и b ($a > b$). Найдите среднюю линию трапеции.

71. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

72. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

■ Пункт 60

73. Даны отрезки a, b, c, d, e. Постройте отрезок $x = \frac{abc}{de}$.

■ Пункт 61

74. 1) Докажите, что любые две медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.
2) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

75. В общем случае на окружности Эйлера лежат девять точек (середины сторон треугольника, середины отрезков, соединяющих его ортоцентр с вершинами, и основания высот треугольника). Сколько различных точек из них лежит на окружности Эйлера в случае равностороннего треугольника?

76. Решите предыдущую задачу для случая равнобедренного треугольника, не являющегося прямоугольным (и равносторонним).

77. Середины сторон любого треугольника не могут лежать на одной прямой (по теореме 1.1). А могут ли основания высот треугольника лежать на одной прямой и в каком случае?



Теорема Пифагора

62 Косинус угла

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначается так: $\cos\alpha$. На рисунке 148 показан прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным α. Косинус угла α равен отношению катета AC, прилежащего к этому углу, к гипотенузе AB, т. е. $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$.

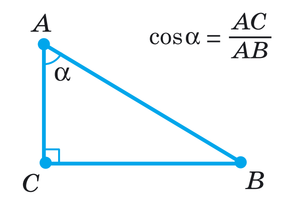
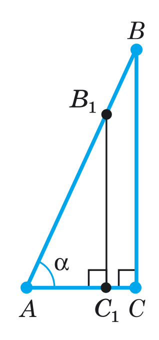


Рис. 148

Теорема 7.1

Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.

Это означает, что у двух прямоугольных треугольников с одним и тем же острым углом косинусы этого угла равны.



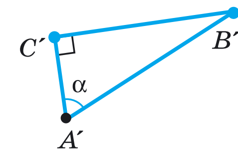


Рис. 149

Доказательство.

Пусть ABC и $A'B'C'$ — два прямоугольных треугольника с одним и тем же углом при вершинах A и A', равным α (рис. 149). Требуется доказать, что $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$.

Построим треугольник AB_1C_1, равный треугольнику $A'B'C'$, как показано на рисунке 149. Так как прямые BC и B_1C_1 перпендикулярны прямой AC, то они параллельны. По теореме о пропорциональных отрезках

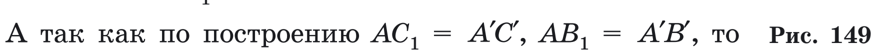
$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

А так как по построению $AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$, то

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

Теорема доказана.

63 Теорема Пифагора



Теорема 7.2

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство.

Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведём высоту CD из вершины угла C (рис. 150). По определению косинуса угла $\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, отсюда

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

Аналогично $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, отсюда

$$AB \cdot BD = BC^2.$$

Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Теорема доказана.

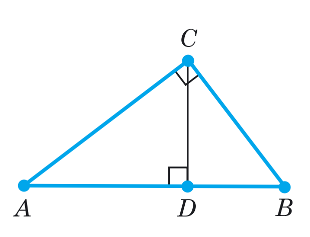


Рис. 150

Из теоремы Пифагора следует, что

в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$\cos \alpha < 1$ для любого острого угла α.

Задача (11). Найдите медиану равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b, проведённую к основанию.



Пифагор — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

Решение.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его медиана, проведённая к основанию (рис. 151). Как мы знаем, медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой. Поэтому треугольник ACD прямоугольный с прямым углом D. По теореме Пифагора

$$AD^2 + CD^2 = AC^2, \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + CD^2 = b^2.$$

Отсюда

$$CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

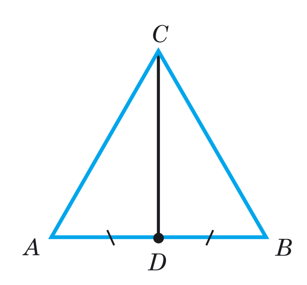


Рис. 151



64 Египетский треугольник

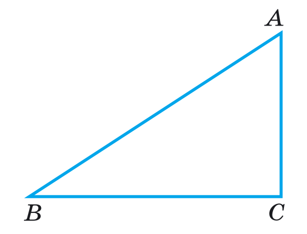
Задача (17). Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2 + b^2 = c^2$, то у него угол, противолежащий стороне c, прямой.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник, у которого $AB = c$, $AC = a$, $BC = b$ (рис. 152). Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $A_1C_1 = a$ и $B_1C_1 = b$.

По теореме Пифагора у него гипотенуза $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = c$.

Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует, что угол треугольника ABC при вершине C прямой.



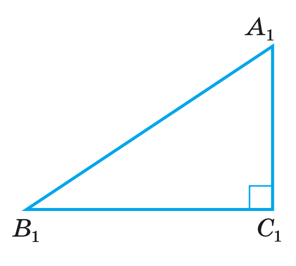


Рис. 152

Землемеры Древнего Египта для построения прямого угла пользовались следующим приёмом. Бечёвку узлами делили на 12 равных частей и концы связывали. Затем бечёвку растягивали на земле так, что получался треугольник со сторонами 3, 4 и 5 делений. Угол треугольника, противолежащий стороне с 5 делениями, был прямой ($3^2+4^2=5^2$).

В связи с указанным способом построения прямого угла треугольник со сторонами 3, 4 и 5 ед. иногда называют **египетским**.





65 Перпендикуляр и наклонная

Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C — любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется **наклонной**, проведённой из точки B к прямой a (рис. 153). Точка C называется **основанием наклонной**. Отрезок AC называется **проекцией наклонной**.

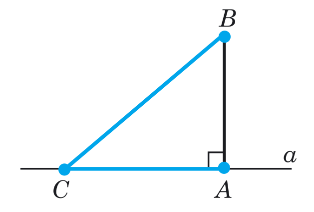


Рис. 153

Из теоремы Пифагора следует, что

если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

Действительно (см. рис. 153), по теореме Пифагора

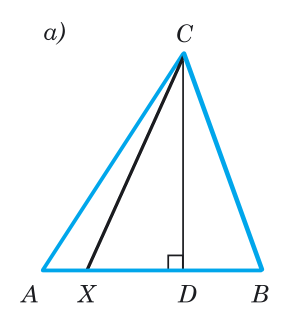
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Отсюда видно, что $BC > AB$. При данном AB чем больше AC, тем больше BC.

Задача (19). На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Докажите, что отрезок CX меньше по крайней мере одной из сторон AC или BC.

Решение.

Проведём высоту CD треугольника. В любом случае отрезок DX меньше либо AD (рис. 154, *а*), либо BD (рис. 154, *б*). По свойству наклонных, проведённых из одной точки, следует, что отрезок CX меньше по крайней мере одного из отрезков AC или BC. Что и требовалось доказать.



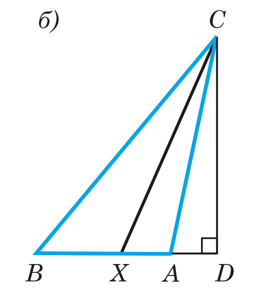


Рис. 154

66 Неравенство треугольника

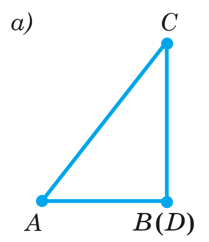
Если точки A и B различны, то **расстоянием** между ними называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними принимается равным нулю.

Следующую теорему называют неравенством треугольника.

Теорема 7.3

Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

Это значит, что каждое из этих расстояний меньше суммы или равно сумме двух других.



Доказательство.

Пусть A, B, C — три данные точки. Если две точки из трёх или все три точки совпадают, то утверждение теоремы очевидно.

Если все точки различны и лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими, например B. В этом случае $AB + BC = AC$. Отсюда видно, что каждое из трёх расстояний не больше суммы двух других.

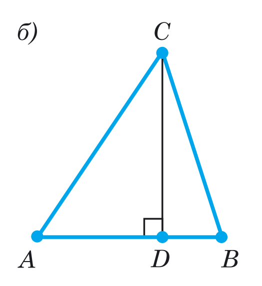


Рис. 155

Допустим теперь, что точки не лежат на одной прямой (рис. 155). Докажем, что $AB < AC + BC$. Опустим перпендикуляр CD на прямую AB. По доказанному $AB \leqslant AD + BD$. И так как $AD < AC$ и $BD < BC$, то $AB < AC + BC$. Теорема доказана.

Заметим, что в случае, когда точки не лежат на одной прямой, в неравенстве треугольника строгое неравенство. Отсюда следует, что

в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Задача (23). Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.

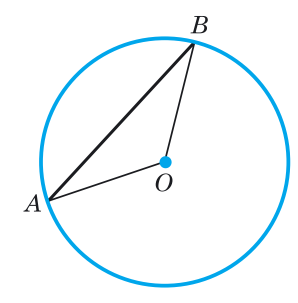


Рис. 156

Решение (рис. 156).

По неравенству треугольника

$$AB \leqslant OA + OB = 2R,$$

причём если центр O не лежит на отрезке AB, то неравенство строгое. Равенство имеет место только в случае, когда хорда проходит через центр, т. е. является диаметром.

67 Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

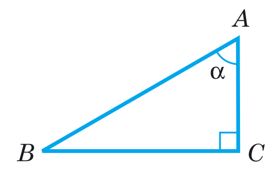
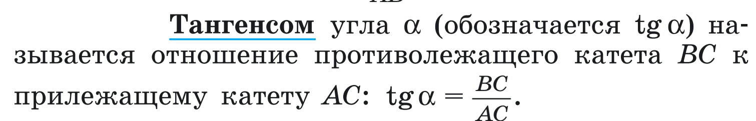


Рис. 157

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 157). Согласно определению $\cos\alpha$ равен отношению катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе.

Синусом угла α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$.



Тангенсом угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$.

Котангенсом угла α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$) называется отношение прилежащего катета AC к противолежащему катету BC: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$.

Синус, тангенс и котангенс угла, так же как и косинус, зависят только от величины угла.

Действительно, по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$. По определению $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Так как $\cos\alpha$ зависит только от величины угла, то и $\sin\alpha$ зависит только от величины угла.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на AB:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят только от величины угла.

Из определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ получаем следующие правила:

1. **Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на sin α.**
2. **Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α.**
3. **Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на tg α.**
4. **Катет, прилежащий к углу α, равен произведению второго катета на ctg α.**

Эти правила позволяют, зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны; зная две стороны, находить острые углы (рис. 158).



Задача (47). Даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

Решение (рис. 159).

$AC = AB \cos\alpha = c\cos\alpha$;

$BC = AB \sin\alpha = c\sin\alpha$;

$BD = BC \sin\alpha = c\sin^2\alpha$;

$AD = AC \cos\alpha = c\cos^2\alpha$;

$CD = AC \sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha$.

Для sin α, cos α, tg α и ctg α составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу α найти sin α, cos α, tg α и ctg α или по значениям sin α, cos α, tg α и ctg α найти соответствующий угол. В настоящее время для этой цели обычно применяют микрокалькуляторы.

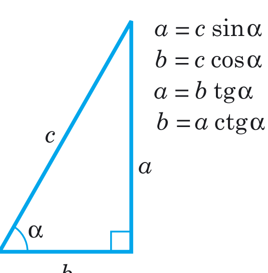


Рис. 158

68 Основные тригонометрические тождества

Два тождества вы уже знаете:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Докажем следующие тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

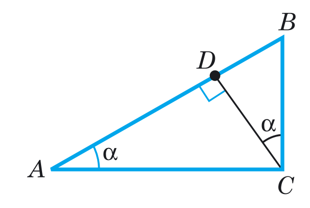


Рис. 159

Возьмём любой прямоугольный треугольник ABC с углом при вершине A, равным α (рис. 160). По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

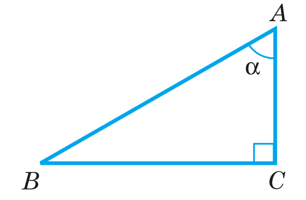


Рис. 160

Разделим обе части равенства на AB^2. Получим $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Таким образом, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Это равенство есть тождество. Оно верно для любого острого угла α.

Чтобы получить второе тождество, разделим обе части полученного тождества на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Если обе части тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ разделить на $\sin^2\alpha$, то получим третье тождество:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти тождества позволяют, зная одну из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$, найти три другие.

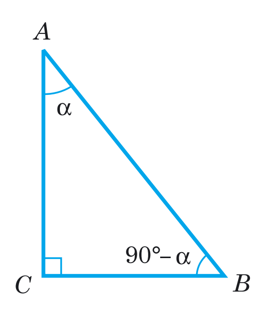


Рис. 161

Задача (63). Вычислите значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.



Решение.

Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{12}.$$

69 Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

Теорема 7.4

Для любого острого угла α

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Доказательство.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с острым углом α при вершине A (рис. 161). Тогда острый угол B равен $90^\circ - \alpha$. По определению

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}, \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

Из второго и третьего равенств получаем $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. Из первого и четвёртого равенств получаем $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Теорема доказана.

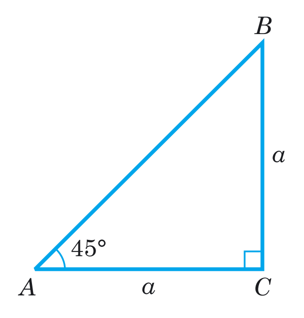


Рис. 162

Найдём синус, косинус, тангенс и котангенс угла 45°. Для этого построим прямоугольный треугольник с острым углом 45° (рис. 162). Второй его острый угол тоже равен 45°, поэтому треугольник равнобедренный. Пусть катеты треугольника равны a. По теореме Пифагора гипотенуза будет $a\sqrt{2}$. Находим:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{tg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{ctg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Найдём синус, косинус, тангенс и котангенс угла 30°. Возьмём равносторонний треугольник ABC (рис. 163). Проведём в нём медиану AD. Она будет биссектрисой и высотой. Поэтому треугольник ABD прямоугольный с острым углом при вершине A, равным 30°. Пусть a — сторона равностороннего треугольника. Тогда $BD = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{ctg } 30^\circ = \frac{1}{\text{tg } 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Так как $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, то

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\text{ctg } 60^\circ = \frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

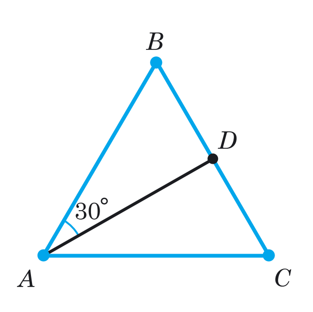


Рис. 163

70 Изменение синуса, косинуса, тангенса и котангенса при возрастании угла

Теорема 7.5

При возрастании острого угла $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают, а $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ убывают.

Доказательство.

Пусть α и β — острые углы, причём $\alpha < \beta$. Отложим углы α и β от полупрямой AB в одну полуплоскость (рис. 164). Проведём через точку B прямую, перпендикулярную AB. Она пересекает стороны наших углов в точках C и D.

Так как $\alpha < \beta$, то точка C лежит между точками B и D. Поэтому $BC < BD$. А значит, по свойству наклонных, проведённых из одной точки к прямой, $AC < AD$.

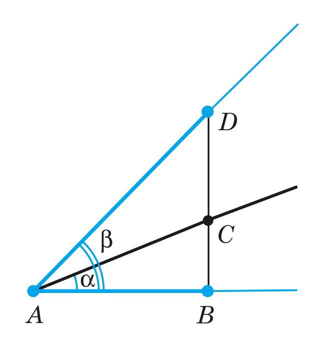


Рис. 164

Так как $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$, $\cos\beta = \frac{AB}{AD}$, то $\cos\alpha > \cos\beta$, т. е. при возрастании угла косинус убывает.

Так как $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании угла, то $\sin\alpha$ возрастает.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\sin\alpha$ возрастает, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании α, то $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает при возрастании α, а $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает. Теорема доказана.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Докажите, что косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.
3. Докажите теорему Пифагора.
4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.
5. Докажите, что $\cos\alpha < 1$ для острого угла α.
6. Докажите, что если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные, то любая наклонная больше перпендикуляра. Равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.
7. Докажите неравенство треугольника.
8. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

9. Дайте определения синуса, тангенса и котангенса острого угла. Докажите, что они зависят только от градусной меры угла.
10. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол, через острый угол и другой катет?
11. Докажите тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

12. Докажите, что для любого острого угла α $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.
13. Чему равны значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°?
14. Докажите, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают при возрастании острого угла α, а $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ убывают.

Задачи

Пункт 62

1. Постройте угол, косинус которого равен: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5; 4) 0,8.

Пункт 63

2. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу, если: 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 1$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$.
3. У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a. Найдите второй катет, если: 1) $c = 5$, $a = 3$; 2) $c = 13$, $a = 5$; 3) $c = 6$, $a = 5$.
4. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Найдите третью сторону. (Рассмотрите два случая.)
5. Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?
6. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 16 дм и 30 дм; 3) 5 м и 12 м.
7. Стороны прямоугольника 60 см и 91 см. Чему равна диагональ?
8. Диагональ квадрата a. Чему равна сторона квадрата?
9. Можно ли из круглого листа железа диаметром 1,4 м вырезать квадрат со стороной 1 м?
10. Найдите высоту равнобокой трапеции, у которой основания 5 м и 11 м, а боковая сторона 4 м.
11. Найдите медиану равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b, проведённую к основанию.
12. Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте 230 км, если расстояние между ними по прямой равно 2200 км? Радиус Земли равен 6370 км.
13. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите высоту.

14. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок: 1) $\sqrt{a^3+b^2}$; 2) $\sqrt{a^3-b^2}$, $a > b$?

15. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок $x=\sqrt{ab}$?

16. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жёлоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы жёлоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землёй. Найдите длину жёлоба.

17. Докажите, что если треугольник имеет стороны a, b, c и $a^2 + b^2 = c^2$, то угол, противолежащий стороне c, прямой.

18. Чему равен угол треугольника со сторонами 5, 12, 13, противолежащий стороне 13?

Пункт 65

19. На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Докажите, что отрезок CX меньше по крайней мере одной из сторон AC или BC.

20. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками на сторонах треугольника не больше большей из его сторон.

21. Даны прямая и точка C на расстоянии h от этой прямой. Докажите, что из точки C можно провести две и только две наклонные длины l, если $l > h$ (рис. 165).

22. Докажите, что прямая, отстоящая от центра окружности на расстояние, меньшее радиуса, пересекает окружность в двух точках.

Пункт 66

23. Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.

24. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если:
1) $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 12$ м;
2) $AB = 10{,}7$, $BC = 17{,}1$, $AC = 6{,}4$.

25. Докажите, что любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

26. Может ли у параллелограмма со сторонами 4 см и 7 см одна из диагоналей быть равной 2 см?

27. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая — 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что её длина равна целому числу метров.

28. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведённая из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC.

29. Известно, что диагонали четырёхугольника пересекаются. Докажите, что сумма их длин меньше периметра, но больше полупериметра четырёхугольника.

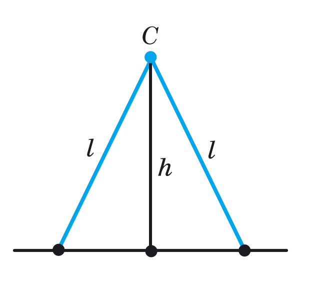
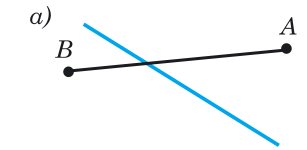


Рис. 165

30. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что сумма расстояний от любой точки плоскости до точек A, B, C и D не меньше чем $OA + OB + OC + OD$.



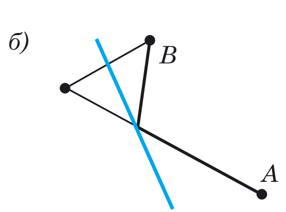


Рис. 166

31. На прямолинейном шоссе требуется указать место автобусной остановки так, чтобы сумма расстояний от неё до населённых пунктов A и B была наименьшей. Рассмотрите два случая: 1) пункты расположены по разные стороны от шоссе (рис. 166, *а*); 2) пункты расположены по одну сторону от шоссе (рис. 166, *б*).

32. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональны числам 1, 2, 3?

33. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.

34. Внутри окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.

35. Вне окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.

36. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 20 см, а радиусы равны 8 см и 11 см? Объясните ответ.

37. Могут ли пересекаться окружности радиусами 6 см и 12 см, центры которых находятся на расстоянии 5 см? Объясните ответ.

38. Докажите, что в задаче 36 окружности находятся одна вне другой, а в задаче 37 окружность радиуса 6 см находится внутри окружности радиуса 12 см.

39. Могут ли пересекаться окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами d, если $R_1 + R_2 < d$?

40. Даны три положительных числа a, b, c, удовлетворяющие условиям $a \leqslant b \leqslant c < a + b$. Докажите последовательно утверждения:

1) $0 < \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$;

2) существует прямоугольный треугольник BCD, у которого гипотенуза $BC = a$, а катет $BD = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ (рис. 167);

3) треугольник ABC, у которого $BC = a$, $AB = c$, а расстояние BD равно $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$, имеет сторону $AC = b$ (см. рис. 167).

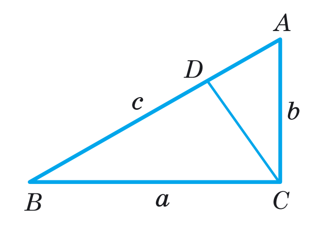


Рис. 167

41. Даны три положительных числа a, b, c. Докажите, что если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами a, b, c.

42. Можно ли построить треугольник со сторонами:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см;
2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см;
4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

43. Даны две окружности с радиусами R_1, R_2 и расстоянием между центрами d. Докажите, что если каждое из чисел R_1, R_2 и d меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках (рис. 168).

Пункт 67

44. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и другой катет.

45. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а один из острых углов α. Найдите другой острый угол и катеты.

46. В прямоугольном треугольнике катет равен a, а противолежащий ему угол α. Найдите второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.

47. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

48. 1) Найдите $\sin 22°$; $\sin 22°36'$; $\sin 22°38'$; $\sin 22°41'$; $\cos 68°$; $\cos 68°18'$; $\cos 68°23'$.
2) Найдите угол x, если $\sin x = 0{,}2850$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

49. Найдите значения синуса и косинуса углов: 1) 16°; 2) 24°36′; 3) 70°32′; 4) 88°49′.

50. Найдите величину острого угла x, если: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

51. Найдите значение тангенса угла: 1) 10°; 2) 40°40′; 3) 50°30′; 4) 70°15′.

52. Найдите острый угол x, если: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

53. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание равно 40,6 м. Найдите углы треугольника и боковую сторону.

54. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 19:28. Найдите его углы.

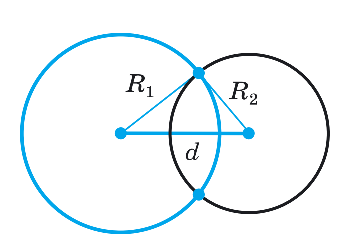


Рис. 168

55. Стороны прямоугольника равны 12,4 и 26. Найдите угол между диагоналями.

56. Диагонали ромба равны 4,73 и 2,94. Найдите его углы.

57. Сторона ромба 241 м, высота 120 м. Найдите углы.

58. Радиус окружности равен 5 м. Из точки, отстоящей от центра на 13 м, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных и угол между ними.

59. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого 7 м, составляет 4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом (рис. 169).

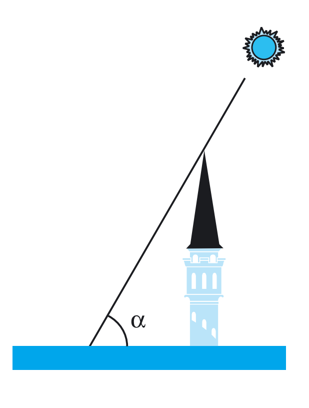


Рис. 169

60. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно a. Найдите боковую сторону этого треугольника.

61. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

1) по двум катетам:
а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$;
в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;

2) по гипотенузе и катету:
а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$;
в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;

3) по гипотенузе и острому углу:
а) $c = 2$, $\alpha = 20^\circ$; б) $c = 4$, $\alpha = 50^\circ 20'$;
в) $c = 8$, $\alpha = 70^\circ 36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76^\circ 21'$;

4) по катету и противолежащему углу:
а) $a = 3$, $\alpha = 30^\circ 27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40^\circ 48'$;
в) $a = 7$, $\alpha = 60^\circ 35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68^\circ$.

Пункт 68

62. Упростите выражения:

1) $1 - \sin^2\alpha$; 2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;
5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;
7) $\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha\,(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\sin^2\alpha}$.

63. Вычислите значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

64. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$;

3) $\sin\alpha = 0{,}8$.



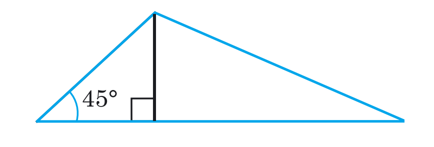


Рис. 170

65. Постройте угол α, если:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$;

3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$; 5) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7$.

Пункт 69

66. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

67. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус R окружности, описанной около него.

68. В треугольнике один из углов при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 см и 21 см. Найдите бо́льшую боковую сторону[1] (рис. 170).

69. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите другие стороны этого треугольника.

70. Диагональ прямоугольника в 2 раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.

71. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.

Пункт 70

72. Какой из углов больше — α или β, если:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}74$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{2}$?

73. У прямоугольного треугольника ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше — AC или BC?

74. У прямоугольного треугольника ABC катет BC больше катета AC. Какой угол больше — A или B?

---

[1] Иногда в произвольном треугольнике, необязательно равнобедренном, сторона, проведённая горизонтально, называется основанием, а две другие — боковыми сторонами, как в данной задаче.



Декартовы координаты на плоскости

71 Определение декартовых координат

Проведём на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y — **оси координат** (рис. 171). Ось x (она обычно горизонтальная) называется **осью абсцисс**, а ось y — **осью ординат**. Точкой пересечения O — **началом координат** — каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть **положительной**, отмечая её стрелкой, а другую — **отрицательной**.

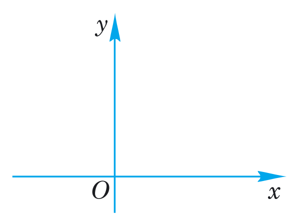


Рис. 171

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — **координаты точки** — абсциссу (x) и ординату (y) по такому правилу.

Через точку A проведём прямую, параллельную оси ординат (рис. 172). Она пересечёт ось абсцисс x в некоторой точке A_x. **Абсциссой** точки A мы будем называть число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки A_x. Это число будет положительным, если A_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательным, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси y, то полагаем x равным нулю.

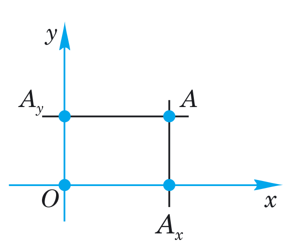


Рис. 172

Ордината (y) точки A определяется аналогично. Через точку A проведём прямую, параллельную оси абсцисс x (см. рис. 172). Она пересечёт ось ординат y в некоторой точке A_y. **Ординатой** точки A мы будем называть число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки A_y. Это число будет положительным, если A_y принадлежит положительной полуоси, и отрицательным, если A_y принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси абсцисс x, то полагаем y равным нулю. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например: A (x; y) (на первом месте абсцисса, на втором — ордината).

Оси координат разбивают плоскость на четыре части — четверти: I, II, III, IV (рис. 173). В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

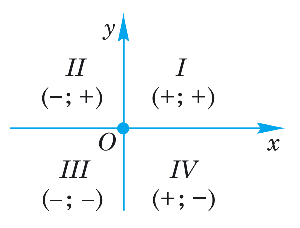


Рис. 173

Точки оси x (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты ($y = 0$), а точки оси y (оси ординат) имеют равные нулю абсциссы ($x = 0$). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть **плоскостью xy**. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто $(x; y)$. Введённые на плоскости координаты x и y называются **декартовыми** по имени Р. Декарта, который впервые применил их в своих исследованиях.



Р. Декарт — французский учёный (1596—1650)

Задача (9). Даны две точки A (−3; 2) и B (4; 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось ординат, но не пересекает ось абсцисс.

Решение.

Ось y разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости абсциссы точек положительны, а в другой — отрицательны. Так как у точек A и B абсциссы противоположных знаков, то точки A и B лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок AB пересекает ось y.

Ось x также разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости ординаты точек положительны, а в другой — отрицательны. У точек A и B ординаты одного знака (положительны). Значит, точки A и B лежат в одной полуплоскости. А следовательно, отрезок AB не пересекается с осью x.

72 Координаты середины отрезка

Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — две произвольные точки и C $(x; y)$ — середина отрезка AB. Найдём координаты x, y точки C.

Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен оси y, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведём через точки A, B, C прямые, параллельные оси y (рис. 174). Они пересекут ось x в точках A_1 $(x_1; 0)$, B_1 $(x_2; 0)$, C_1 $(x; 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1.



Так как точка C_1 — середина отрезка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, а значит, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$. Первое равенство невозможно, так как

$x_1 \neq x_2$. Поэтому верно второе. А из него получается формула $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Если $x_1 = x_2$, т. е. отрезок AB параллелен оси y, то все три точки A_1, B_1, C_1 имеют одну и ту же абсциссу. Значит, формула остаётся верной и в этом случае.

Ордината точки C находится аналогично. Через точки A, B, C проводятся прямые, параллельные оси x. Получается формула $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

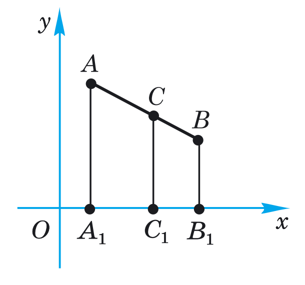
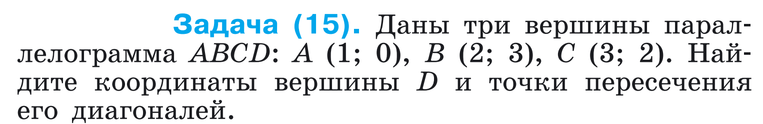


Рис. 174



Задача (15). Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2). Найдите координаты вершины D и точки пересечения его диагоналей.

Решение.

Точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них. Поэтому она является серединой отрезка AC, а значит, имеет координаты

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad y = \frac{0 + 2}{2} = 1.$$

Теперь, зная координаты точки пересечения диагоналей, находим координаты x, y четвёртой вершины D. Пользуясь тем, что точка пересечения диагоналей является серединой отрезка BD, имеем

$$\frac{2 + x}{2} = 2, \quad \frac{3 + y}{2} = 1.$$

Отсюда $x = 2$, $y = -1$.

73 Расстояние между точками

Пусть на плоскости xy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведём через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат, и обозначим через A точку их пересечения (рис. 175). Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Применяя к прямо-

угольному треугольнику AA_1A_2 теорему Пифагора, получим

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (*)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

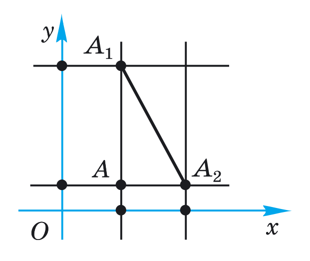


Рис. 175

Хотя формула (*) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остаётся верной и в других случаях. Действительно, если $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d равно $|y_1 - y_2|$. Тот же результат даёт и формула (*). Аналогично рассматривается случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. При $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ точки A_1, A_2 совпадают и формула (*) даёт $d = 0$.



Задача (19). Найдите на оси x точку, равноудалённую от точек (1; 2) и (2; 3).

Решение.

Пусть (x; 0) — искомая точка. Приравняв расстояния от неё до данных точек, получим

$$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 2)^2 + (0 - 3)^2.$$

Отсюда находим $x = 4$. Значит, искомая точка есть (4; 0).

74 Уравнение окружности

Уравнением фигуры в декартовых координатах на плоскости называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

Составим уравнение окружности с центром в точке A_0 (a; b) и радиусом R (рис. 176). Возьмём произвольную точку A (x; y) на окружности. Расстояние от неё до центра A_0 равно R. Квадрат расстояния от точки A до точки A_0 равен $(x - a)^2 + (y - b)^2$. Таким образом, координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

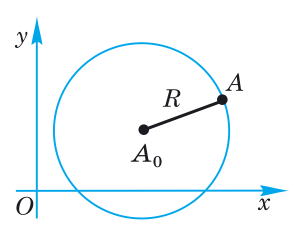


Рис. 176

Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению (*), принадлежит окружности, так как расстояние от неё до точки A_0 равно R. Отсюда следует, что уравнение (*) действи-

тельно является уравнением окружности с центром A_0 и радиусом R.

Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Задача (30). Какая геометрическая фигура задана уравнением

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \text{ если } \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0?$$

Решение.

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c,$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - c\right)^2}.$$

Видим, что рассматриваемая фигура — окружность с центром $\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$ и радиусом $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

75 Уравнение прямой

Докажем, что

любая прямая в декартовых координатах *x, y* имеет уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (*)$$

где *a, b, c* — некоторые числа, причём хотя бы одно из чисел *a, b* не равно нулю.

Пусть h — произвольная прямая на плоскости xy. Проведём какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой h, и отложим на ней от точки пересечения C с прямой h равные отрезки CA_1 и CA_2 (рис. 177).

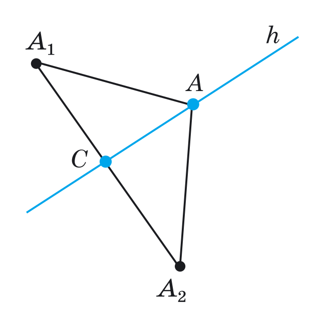


Рис. 177

Пусть a_1, b_1 — координаты точки A_1 и a_2, b_2 — координаты точки A_2. Как мы знаем, любая точка A $(x;\ y)$ прямой h равноудалена от точек A_1 и A_2. Поэтому координаты её удовлетворяют уравнению

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \qquad (**)$$

Обратно: если координаты x и y какой-нибудь точки удовлетворяют уравнению (**), то эта

точка равноудалена от точек A_1 и A_2, а значит, принадлежит прямой h. Таким образом, уравнение (**) является уравнением прямой h. Если в этом уравнении раскрыть скобки и перенести все члены уравнения в его левую часть, то оно примет вид

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Обозначая $2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$, получаем уравнение (*). По крайней мере одно из чисел a, b не равно нулю, так как точки A_1 и A_2 различны. Утверждение доказано.

Задача (35). Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A\,(-1;\ 1)$, $B\,(1;\ 0)$.

Решение.

Как мы знаем, наша прямая имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$. Точки A и B лежат на прямой, а значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению.

Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим

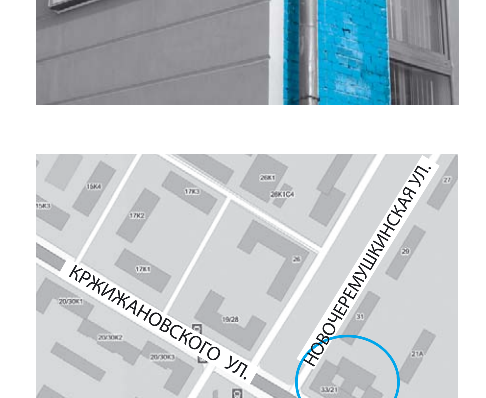
$$-a + b + c = 0,\ a + c = 0.$$

Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например a и b, через третий: $a = -c$, $b = -2c$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой, получим $-cx - 2cy + c = 0$.

На c можно разделить. Тогда получим

$$-x - 2y + 1 = 0.$$

Это и есть уравнение нашей прямой.



76 Координаты точки пересечения прямых

Пусть заданы уравнения двух прямых:

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Найдём координаты их точки пересечения.

Так как точка пересечения $(x;\ y)$ принадлежит каждой из прямых, то её координаты удовлетворяют и первому и второму уравнению. По-

этому координаты точки пересечения являются решением системы уравнений, задающих прямые. Рассмотрим пример.

Пусть уравнениями данных прямых будут:

$$3x - y + 2 = 0,$$
$$5x - 2y + 1 = 0.$$

Решая соответствующую систему уравнений, находим $x = -3$, $y = -7$. Точка пересечения прямых $(-3; -7)$.

Задача (43). Докажите, что прямые, задаваемые уравнениями $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$, при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

Решение.

Допустим, прямые не параллельны, а значит, пересекаются в некоторой точке $(x_1; y_1)$. Так как точка пересечения принадлежит каждой из прямых, то для неё

$$y_1 = kx_1 + l_1,$$
$$y_1 = kx_1 + l_2.$$

Вычитая эти равенства почленно, имеем $0 = l_1 - l_2$. А это противоречит условию $(l_1 \neq l_2)$. Утверждение доказано.

77 Расположение прямой относительно системы координат

Выясним, как расположена прямая относительно осей координат, если её уравнение

$$ax + by + c = 0$$

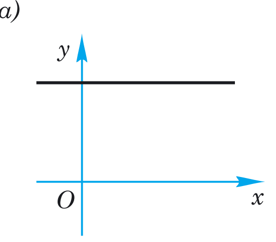
имеет тот или иной частный вид.

1. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так: $y = -\frac{c}{b}$. Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$; следовательно, **прямая параллельна оси *x*** (рис. 178, *а*). В частности, если $c = 0$, то прямая совпадает с осью x.

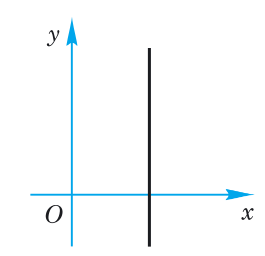
2. $b = 0$, $a \neq 0$. Этот случай рассматривается аналогично. **Прямая параллельна оси *y*** (рис. 178, *б*) и совпадает с ней, если и $c = 0$.

3. $c = 0$. **Прямая проходит через начало координат**, так как координаты $(0; 0)$ удовлетворяют уравнению прямой (рис. 178, *в*).

а)



б)



в)

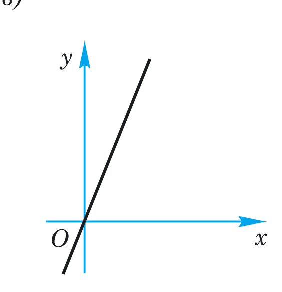


Рис. 178

Задача (45). Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси x и проходит через точку $(2; -3)$.

Решение.

Так как прямая параллельна оси x, то она имеет уравнение вида $y + c = 0$.

Так как точка $(2; -3)$ лежит на прямой, то её координаты удовлетворяют этому уравнению: $-3 + c = 0$. Отсюда $c = 3$. Следовательно, уравнение прямой $y + 3 = 0$.

78 Угловой коэффициент в уравнении прямой

Если в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэффициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получим

$$y = -\frac{a}{b}, \quad x = -\frac{c}{b}.$$

Или, обозначая $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, получим $y = kx + l$.

Выясним геометрический смысл коэффициента k в этом уравнении.

Возьмём две точки на прямой $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$ $(x_1 < x_2)$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_1 = kx_1 + l, \; y_2 = kx_2 + l.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

В случае, представленном на рисунке 179, *а*,

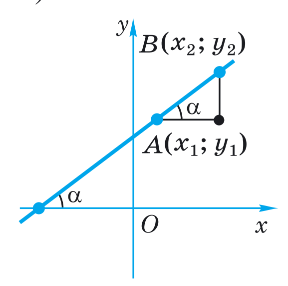
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

В случае, представленном на рисунке 179, *б*,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

Коэффициент k в уравнении прямой называется **угловым коэффициентом** прямой.



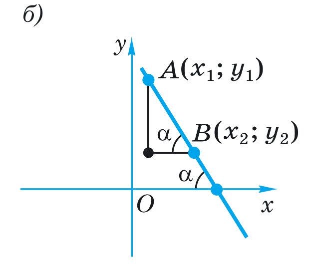


Рис. 179

79 График линейной функции

При построении графиков функций на уроках алгебры вы, наверное, заметили, что графиком линейной функции является прямая. Теперь мы докажем это.

Пусть $y = ax + b$ — линейная функция. Докажем, что её графиком является прямая.

Для данной функции если $x = 0$, то $y = b$, если $x = 1$, то $y = a + b$. Поэтому графику функции принадлежат точки $(0; b)$ и $(1; a + b)$. Составим уравнения прямой, проходящей через эти точки, вида $y = kx + l$.

Так как указанные точки графика лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$b = k \cdot 0 + l,$$
$$a + b = k \cdot 1 + l.$$

Отсюда находим $l = b$, $k = a$. Итак, наша прямая имеет уравнение

$$y = ax + b.$$

Значит, уравнению прямой удовлетворяют все точки графика, т. е. графиком линейной функции является прямая.





80 Пересечение прямой с окружностью

Рассмотрим вопрос о пересечении прямой с окружностью. Пусть R — радиус окружности и d — расстояние от центра окружности до прямой. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к данной,— за ось x (рис. 180). Тогда уравнением окружности будет $x^2 + y^2 = R^2$, а уравнением прямой $x = d$.

Для того чтобы прямая и окружность пересекались, надо, чтобы система двух уравнений

$$x^2 + y^2 = R^2,\ x = d$$

имела решение. И обратно: всякое решение этой системы даёт координаты x, y точки пе-



ресечения прямой с окружностью. Решая нашу систему, получим

$$x = d, \; y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Из выражения для y видно, что система имеет два решения, т. е.

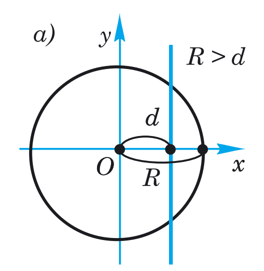
окружность и прямая имеют две точки пересечения, если $R > d$ (см. рис. 180, *а*).

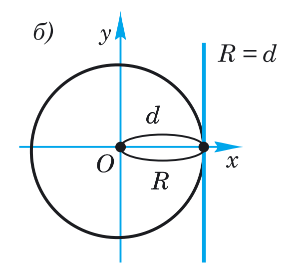
Система имеет одно решение, т. е.

прямая и окружность касаются, если $R = d$ (см. рис. 180, *б*).

Система не имеет решения, т. е.

прямая и окружность не пересекаются, если $R < d$ (см. рис. 180, *в*).





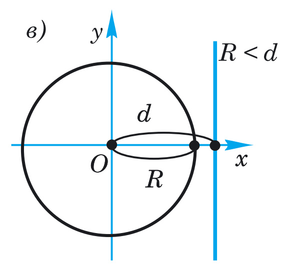


Рис. 180

Задача (50). Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой $y = 2x + 1$.

Решение.

Так как точки пересечения лежат на окружности и на прямой, то их координаты удовлетворяют системе уравнений $x^2 + y^2 = 1$, $y = 2x + 1$.

Решим эту систему. Подставим y из второго уравнения в первое. Получим уравнение для x:

$$5x^2 + 4x = 0.$$

Уравнение имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -0{,}8$. Это абсциссы точек пересечения. Ординаты этих точек найдём из уравнения прямой, подставляя в него x_1 и x_2. Получаем $y_1 = 1$, $y_2 = -0{,}6$. Итак, точки пересечения прямой и окружности $(0; 1)$ и $(-0{,}8; -0{,}6)$.

81 Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для любого угла от 0° до 180°

До сих пор значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса были определены только для острых углов. Теперь определим их для любого угла от 0° до 180°.

Возьмём окружность на плоскости xy с центром в начале координат и радиусом R (рис. 181). Отложим от положительной полуоси x в верхнюю

полуплоскость (полуплоскость, где $y > 0$) угол α. Пусть x и y — координаты точки A. Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для острого угла α выражаются через координаты точки A, а именно:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R},\ \sin\alpha = \frac{y}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

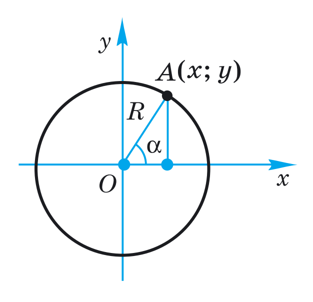


Рис. 181

Определим теперь значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ этими формулами для любого угла α. (Для $\operatorname{tg}\alpha$ угол $\alpha = 90°$ исключается, а для $\operatorname{ctg}\alpha$ исключается угол $\alpha = 180°$.)

При таком определении $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Считая, что совпадающие лучи образуют угол $0°$, будем иметь $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. (Для $\operatorname{ctg}\alpha$ угол $\alpha = 0°$ исключается.)

Докажем, что

для любого угла α $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Для угла $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Действительно, треугольники OAB и OA_1B_1 равны по гипотенузе и острому углу (рис. 182). Из равенства треугольников следует, что $AB = A_1B_1$, т. е. $y = y_1$; $OB = OB_1$, следовательно, $x = -x_1$. Поэтому

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

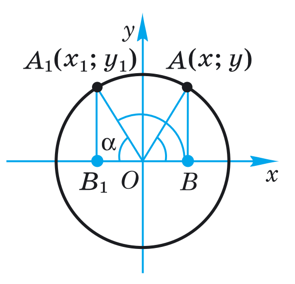


Рис. 182

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогично получаем $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы

1. Объясните, как определяются координаты точки.
2. Какие знаки у координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвёртой) четверти?
3. Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси ординат? Чему равны ординаты точек, лежащих на оси абсцисс? Чему равны координаты начала координат?
4. Выведите формулы для координат середины отрезка.

5. Выведите формулу для расстояния между точками.
6. Что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?
7. Выведите уравнение окружности.
8. Докажите, что прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$.
9. Как найти координаты точек пересечения двух прямых, если заданы уравнения этих прямых?
10. Как расположена прямая, если в её уравнении коэффициент $a = 0$ ($b = 0$, $c = 0$)?
11. Что такое угловой коэффициент прямой и каков его геометрический смысл?
12. Докажите, что график линейной функции — прямая.
13. При каком условии прямая и окружность не пересекаются, пересекаются в двух точках, касаются?
14. Дайте определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для любого угла от $0°$ до $180°$.
15. Докажите, что для любого угла α ($0° < \alpha < 180°$) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Задачи

Пункт 71

1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами: (1; 2), (−2; 1), (−1; −3), (2; −1).
2. Возьмите наудачу четыре точки на плоскости xy. Найдите координаты этих точек.
3. На прямой, параллельной оси x, взяты две точки. У одной из них ордината $y = 2$. Чему равна ордината другой точки?
4. На прямой, перпендикулярной оси x, взяты две точки. У одной из них абсцисса $x = 3$. Чему равна абсцисса другой точки?
5. Из точки A (2; 3) опущен перпендикуляр на ось x. Найдите координаты основания перпендикуляра.
6. Через точку A (2; 3) проведена прямая, параллельная оси x. Найдите координаты точки пересечения её с осью y.
7. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых абсцисса $x = 3\frac{3}{4}$.
8. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $|x| = 3\frac{1}{3}$.
9. Даны две точки A (−3; 2) и B (4; 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось ординат, но не пересекает ось абсцисс.
10. Какую из полуосей оси y (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?
11. Найдите расстояние от точки (−3; 4) до: 1) оси x; 2) оси y.

■ Пункт 72

12. Найдите координаты середины отрезка AB, если: 1) A (1; −2), B (5; 6); 2) A (−3; 4), B (1; 2); 3) A (5; 7), B (−3; −5).

13. Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты второго конца отрезка AB, если: 1) A (0; 1), C (−1; 2); 2) A (−1; 3), C (1; −1); 3) A (0; 0), C (−2; 2).

14. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−1; −2), B (2; −5), C (1; −2), D (−2; 1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.

15. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2). Найдите координаты четвёртой вершины D и точки пересечения его диагоналей.

16. Найдите середины сторон треугольника с вершинами в точках O (0; 0), A (0; 2), B (−4; 0).

■ Пункт 73

17. Даны три точки A (4; −2), B (1; 2), C (−2; 6). Найдите расстояния между этими точками, взятыми попарно.

18. Докажите, что точки A, B, C в задаче 17 лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

19. Найдите на оси x точку, равноудалённую от точек (1; 2) и (2; 3).

20. Найдите точку, равноудалённую от осей координат и от точки (3; 6).

21. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (4; 1), B (0; 4), C (−3; 0), D (1; −3) является квадратом.

22. Докажите, что четыре точки (1; 0), (−1; 0), (0; 1), (0; −1) являются вершинами квадрата.

■ Пункт 74

23. Какие из точек (1; 2), (3; 4), (−4; 3), (0; 5), (5; −1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

24. Найдите на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$, точки: 1) с абсциссой 5; 2) с ординатой −12.

25. Даны точки A (2; 0) и B (−2; 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

26. Даны точки A (−1; −1) и C (−4; 3). Составьте уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку A.

27. Найдите центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку (1; 4) и радиус окружности равен 5.

28. Составьте уравнение окружности с центром в точке (1; 2), касающейся оси x.

29. Составьте уравнение окружности с центром (−3; 4), проходящей через начало координат.

30. Какая геометрическая фигура задана уравнением

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \text{ если } \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0?$$

31. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$.

32. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью x.

33. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$, $|a| > 1$, не пересекается с осью y.

34. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, $a \neq 0$ касается оси y.

Пункт 75

35. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A (−1; 1), B (1; 0).

36. Составьте уравнение прямой AB, если: 1) A (2; 3), B (3; 2); 2) A (4; −1), B (−6; 2); 3) A (5; −3), B (−1; −2).

37. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника OAB в задаче 16.

38. Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax + by = 1$, если известно, что она проходит через точки (1; 2) и (2; 1)?

39. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением:
1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$;
3) $3x - 2y + 6 = 0$; 4) $4x - 2y - 10 = 0$.

Пункт 76

40. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:
1) $x + 2y + 3 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$;
2) $3x - y - 2 = 0$, $2x + y - 8 = 0$;
3) $4x + 5y + 8 = 0$, $4x - 2y - 6 = 0$.

41. Докажите, что три прямые $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$ и $3x + y = 4$ пересекаются в одной точке.

42. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами (1; 0), (2; 3), (3; 2).

43. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$, при $l_1 \neq l_2$ параллельны.

44. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных прямых:
1) $x + y = 1$; 2) $y = x - 1$; 3) $x - y = 2$;
4) $y = 4$; 5) $y = 3$; 6) $2x + 2y + 3 = 0$.

Пункт 77

45. Составьте уравнение прямой, которая параллельна оси y и проходит через точку (2; −3).

46. Составьте уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку (2; 3).

47. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку (2; 3).

Пункт 78

48. Найдите угловые коэффициенты прямых из задачи 39.
49. Найдите острые углы, которые образует заданная прямая с осью x:
1) $2y = 2x + 3$; 2) $x\sqrt{3} - y = 2$; 3) $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$.

Пункт 80

50. Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой:
1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x + 1$;
3) $y = 3x + 1$; 4) $y = kx + 1$.
51. При каких значениях c прямая $x + y + c = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$: 1) пересекаются; 2) не пересекаются; 3) касаются?

Пункт 81

52. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов: 1) $120°$; 2) $135°$; 3) $150°$.
53. Найдите: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$; 3) $\operatorname{tg} 130°$; 4) $\operatorname{ctg} 110°$.
54. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов: 1) $40°$; 2) $14°36'$; 3) $70°20'$; 4) $30°16'$; 5) $130°$; 6) $150°30'$; 7) $150°33'$; 8) $170°28'$.
55. Найдите углы, для которых: 1) $\sin\alpha = 0{,}2$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}4$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}4$.
56. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если:
1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$;
3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
57. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:
1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$;
3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0° < \alpha < 180°$.
58. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
59. Постройте угол α, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
60. Постройте угол α, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.
61. Докажите, что если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$.
62. Докажите, что если $\sin\alpha = \sin\beta$, то либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = 180° - \beta$.



§ 9 Движение

82 Преобразование фигур

Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена **преобразованием** из данной (рис. 183).

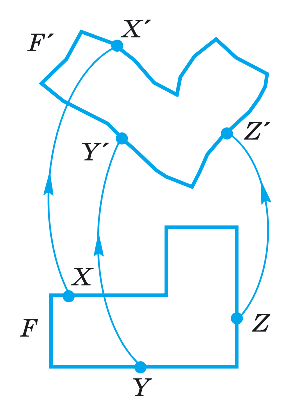


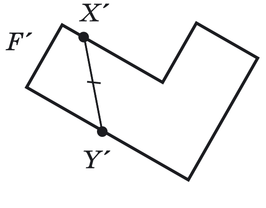
Рис. 183

Преобразование одной фигуры в другую называется **движением**, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X' и Y' другой фигуры так, что $XY = X'Y'$ (рис. 184).

Замечание.

Понятие движения в геометрии связано с обычным представлением о перемещении. Но если мы представляем себе непрерывный процесс, то в геометрии для нас будут иметь значение только начальное и конечное положения фигуры. Пусть фигура F переводится движением в фигуру F', а фигура F' переводится движением в фигуру F'' (рис. 185). Пусть при первом движении точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', а при втором движении точка X' фигуры F' переходит в точку X'' фигуры F''. Тогда преобразование фигуры F в фигуру F'', при котором произвольная точка X фигуры F переходит в точку X'' фигуры F'', сохраняет расстояние между точками, а значит, также является движением. Это свойство движения выражают словами:

два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.



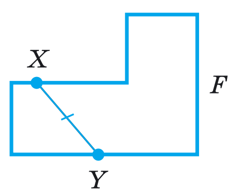


Рис. 184

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F' переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F' (см. рис. 183). Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X' фигуры F'. Преобразование фигуры F' в фигуру F, при котором точка X' переходит в точку X, называется преобразованием, **обратным** данному. Движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные. Очевидно,

преобразование, обратное движению, также является движением.

83 Свойства движения

Теорема 9.1

Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

Это значит, что если точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1, то эти точки также лежат на прямой; если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.



Доказательство.

Пусть точка B прямой AC лежит между точками A и C. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на прямой, то они являются вершинами треугольника. Поэтому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. По определению движения отсюда следует, что $AC < AB + BC$. Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$.

Мы пришли к противоречию. Значит, точка B_1 лежит на прямой A_1C_1. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем теперь, что точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Допустим, что точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1. Тогда

$$A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1,$$

и, следовательно,

$$AB + AC = BC.$$

Но это противоречит равенству

$$AB + BC = AC.$$

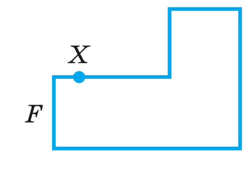
Таким образом, точка A_1 не может лежать между точками B_1 и C_1.

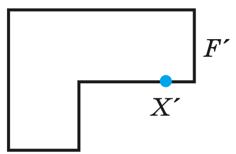
Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между точками A_1 и B_1.

Так как из трёх точек A_1, B_1, C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1. Теорема доказана.

Из теоремы 9.1 следует, что

при движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки (рис. 186).





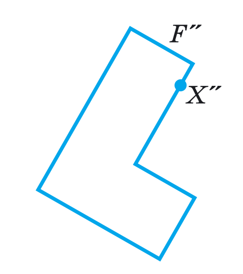


Рис. 185

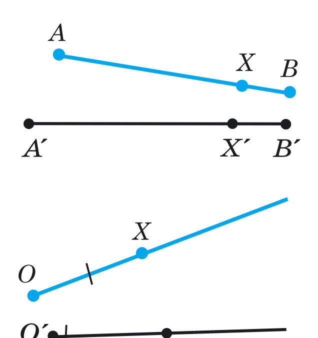


Рис. 186

Докажем, что

при движении сохраняются углы между полупрямыми.

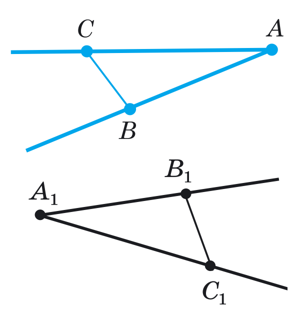


Рис. 187

Пусть AB и AC — две полупрямые, исходящие из одной точки A, не лежащие на одной прямой (рис. 187).

При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

84 Симметрия относительно точки

Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка плоскости (рис. 188). Отложим на продолжении отрезка OX за точку O отрезок OX', равный OX. **Точка X'** называется **симметричной точке X относительно точки O.** Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

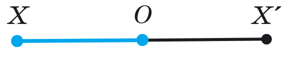


Рис. 188

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая её точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной точки O, называется **преобразованием симметрии относительно точки** O. При этом **фигуры F и F' называются симметричными относительно точки O** (рис. 189).

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется **центрально-симметричной**, а точка O называется **центром симметрии**.

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центр симметрии — точка пересечения диагоналей (рис. 190).

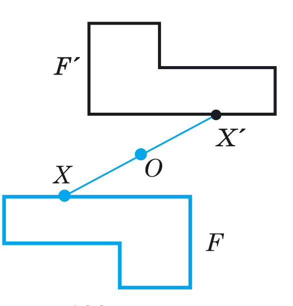


Рис. 189

Теорема 9.2

Преобразование симметрии относительно точки является движением.

Доказательство.

Пусть X и Y — две произвольные точки фигуры F (рис. 191). Преобразование симметрии относительно точки O переводит их в точки X' и Y'.







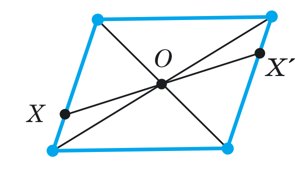


Рис. 190

Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $XY = X'Y'$. А это значит, что симметрия относительно точки O есть движение. Теорема доказана.

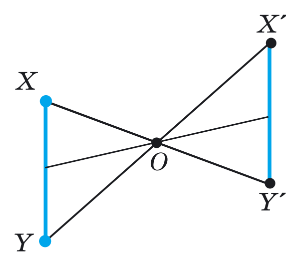


Рис. 191

85 Симметрия относительно прямой

Пусть g — фиксированная прямая (рис. 192). Возьмём произвольную точку X и опустим перпендикуляр AX на прямую g. На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AX', равный отрезку AX. **Точка X'** называется **симметричной точке X относительно прямой g**. Если точка X лежит на прямой g, то симметричная ей точка есть сама точка X. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

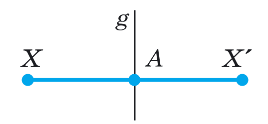


Рис. 192

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая её точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой g, называется **преобразованием симметрии относительно прямой g**. При этом **фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой g** (рис. 193).

Если преобразование симметрии относительно прямой g переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется **симметричной относительно прямой g**, а прямая g называется **осью симметрии** фигуры.

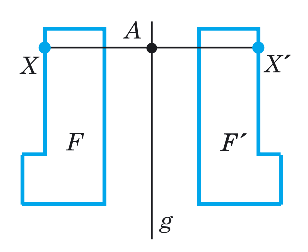


Рис. 193





Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 194). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 195).

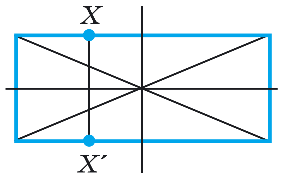


Рис. 194

Теорема 9.3

Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Доказательство.

Примем данную прямую за ось y декартовой системы координат (рис. 196). Пусть произвольная точка A $(x; y)$ фигуры F переходит в точку A' $(x'; y')$ фигуры F'. Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек A и A' равные ординаты, а абсциссы различаются только знаком: $x' = -x$.

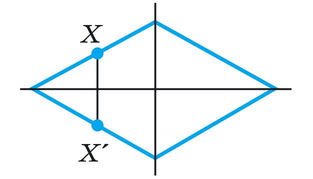


Рис. 195

Возьмём две произвольные точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$. Они перейдут в точки A' $(-x_1; y_1)$ и B' $(-x_2; y_2)$.

Имеем

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда видно, что $AB = A'B'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение. Теорема доказана.

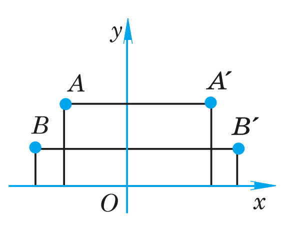


Рис. 196

86 Поворот

Поворотом плоскости около данной точки называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис. 197).

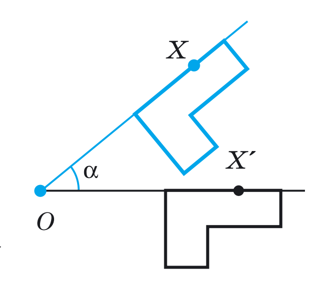


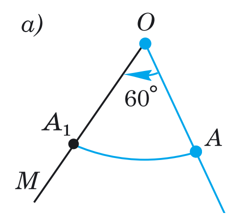
Рис. 197

Это значит, что если при повороте около точки O точка X переходит в точку X', то лучи OX и OX' образуют один и тот же угол, какова бы ни была точка X. Этот угол называется **углом поворота**.

Преобразование фигур при повороте плоскости также называется **поворотом**.

Задача (25). 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.

2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 60° по часовой стрелке.



Решение.

1) Проведём луч OA и построим луч OM так, что $\angle AOM = 60°$ (рис. 198, *а*). Отложим на луче OM отрезок OA_1, равный отрезку OA. Точка A_1 является искомой.

2) Построим точки A_1 и B_1, в которые переходят при заданном повороте точки A и B, являющиеся концами отрезка AB (рис. 198, *б*). Отрезок A_1B_1 является искомым, поскольку при повороте отрезок переходит в отрезок.

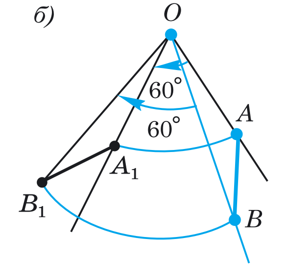


Рис. 198







87 Параллельный перенос и его свойства

Наглядно параллельный перенос определяется как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис. 199). Такое определение не является математически строгим, потому что в нём употребляется выражение «в одном и том же направлении», которое само нуждается в точном определении. В связи с этим параллельному переносу мы дадим другое, отвечающее тому же наглядному представлению, но уже строгое определение.

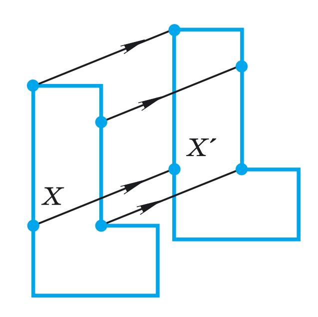


Рис. 199

Введём на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная её точка $(x;\ y)$ переходит в точку $(x + a;\ y + b)$, где a и b — одни и те же для всех точек $(x;\ y)$, называется **параллельным переносом** (рис. 200). Параллельный перенос задаётся формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка $(x;\ y)$ при параллельном переносе.

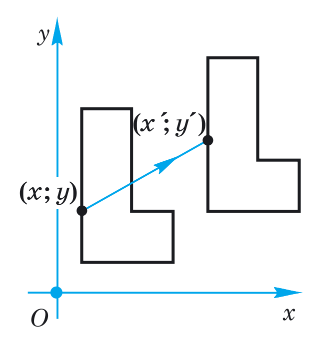


Рис. 200

Параллельный перенос есть движение.

Действительно, две произвольные точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ переходят при параллельном переносе в точки $A'\ (x_1 + a;\ y_1 + b)$, $B'\ (x_2 + a;\ y_2 + b)$.


Поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$



Отсюда $AB = A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением, что и требовалось доказать.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что

при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

Действительно, пусть точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ переходят в точки $A'\ (x_1 + a;\ y_1 + b)$ и $B'\ (x_2 + a;\ y_2 + b)$ (рис. 201). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Те же координаты имеет и середина отрезка $A'B$. Отсюда следует, что диагонали четырёхугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA' и BB' параллельны и равны.

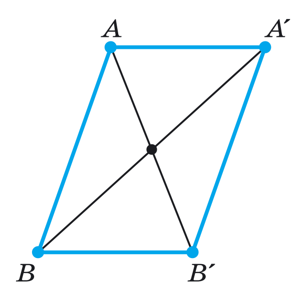
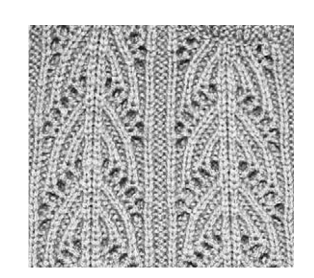


Рис. 201

Заметим, что у параллелограмма $AA'B'B$ параллельны и две другие противолежащие стороны — AB и $A'B'$. Отсюда следует, что

при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).



Замечание.

В предыдущем доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA'. В случае, когда точка B лежит на прямой AA', точка B' тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA' (рис. 202). Значит, все точки A, B, A', B' лежат на одной прямой. Далее,

$$AA' = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$BB' = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

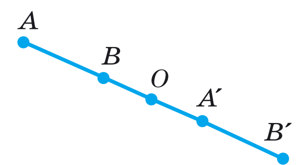
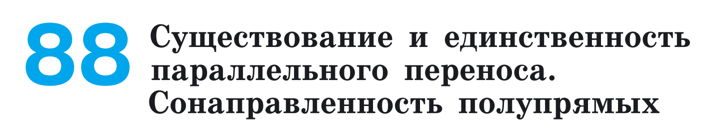


Рис. 202

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2 + b^2}$, а прямая AB переходит в себя.





88 Существование и единственность параллельного переноса. Сонаправленность полупрямых

Теорема 9.4

Каковы бы ни были две точки A и A', существует один и только один параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Доказательство.

Начнём с доказательства существования параллельного переноса, который переводит точку A в точку A'.

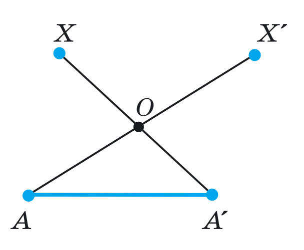
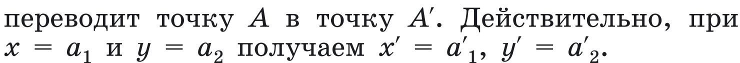


Рис. 203

Введём декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 — координаты точки A и a'_1, a'_2 — координаты точки A'. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x' = x + a'_1 - a_1,$$
$$y' = y + a'_2 - a_2,$$



переводит точку A в точку A'. Действительно, при $x = a_1$ и $y = a_2$ получаем $x' = a'_1$, $y' = a'_2$.

Докажем единственность параллельного переноса, переводящего точку A в точку A'.



Пусть X — произвольная точка фигуры и X' — точка, в которую она переходит при параллельном переносе (рис. 203). Как мы знаем, отрезки XA' и AX' имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O — середину отрезка $A'X$. А точки A и O однозначно определяют точку X', так как точка O является серединой отрезка AX'. Однозначность в определении точки X' и означает единственность параллельного переноса.

Теорема доказана.

Задача (30). При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0). В какую точку переходит начало координат?

Решение.

Любой параллельный перенос задаётся формулами

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$



Так как точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0), то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2$, $b = -1$. Таким образом, наш параллельный перенос, переводящий точку (1; 1) в точку (−1; 0), задаётся формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала ($x = 0$, $y = 0$), получим $x' = -2$, $y' = -1$. Итак, начало координат переходит в точку (−2; −1).

Две полупрямые называются **одинаково направленными** или **сонаправленными**, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены (рис. 204).

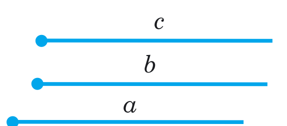


Рис. 204

Действительно, пусть параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x' = x + m,\ y' = y + n, \qquad (*)$$

переводит полупрямую a в полупрямую b, а параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x'' = x' + m_1,\ y'' = y' + n_1, \qquad (**)$$

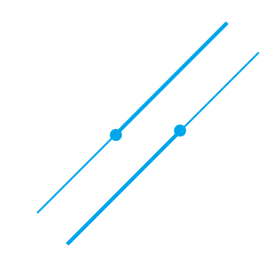
переводит полупрямую b в полупрямую c.

Рассмотрим параллельный перенос, задаваемый формулами

$$x'' = x + m + m_1,\ y'' = y + n + n_1. \qquad (***)$$

Утверждаем, что этот параллельный перенос переводит полупрямую a в полупрямую c. Докажем это.

Пусть $(x; y)$ — произвольная точка полупрямой a. Точка $(x + m; y + n)$ принадлежит полупрямой b согласно формулам $(*)$. Так как точка $(x + m; y + n)$ принадлежит полупрямой b, то согласно формулам $(**)$ точка $(x + m + m_1; y + n + n_1)$ принадлежит полупрямой c. Таким образом, параллельный перенос, задаваемый формулами $(***)$, переводит полупрямую a в полупрямую c. А это значит, что полупрямые a и c одинаково направлены, что и требовалось доказать.


Рис. 205

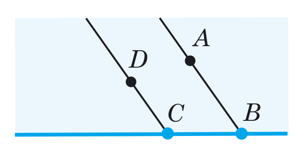


Рис. 206

Две полупрямые называются **противоположно направленными**, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой (рис. 205).



Задача (32). Прямые AB и CD параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

Решение.

Подвергнем луч CD параллельному переносу, при котором точка C переходит в точку B (рис. 206). При этом прямая CD совместится с прямой BA. Точка D, смещаясь по прямой, параллельной CB, остаётся в той же полуплоскости относительно прямой BC. Поэтому луч CD совместится с лучом BA, а значит, эти лучи одинаково направлены.

89 Геометрические преобразования на практике

Известно, что геометрия как наука выросла из практического землемерия. А теперь сама она имеет большое прикладное значение. В частности, на практике широко используются геометрические преобразования (симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот и др.) и их свойства.

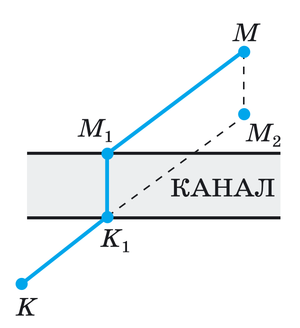


Рис. 207

Задача (39). Два населённых пункта K и M расположены по разные стороны канала. В каком месте следует построить мост (перпендикулярно берегам канала) и прямолинейные дороги от населённых пунктов к мосту, чтобы путь между данными пунктами был кратчайшим?

Решение.

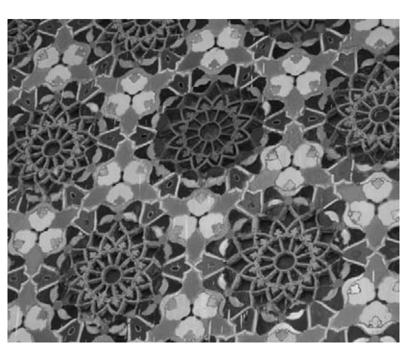
Пусть KK_1M_1M — кратчайший путь от точки K к точке M через мост K_1M_1 (рис. 207). Этот путь состоит из отрезка K_1M_1, равного по длине ширине канала и двух отрезков KK_1 и M_1M, соединяющих населённые пункты с мостом. Так как ширина канала — величина постоянная, то для кратчайшего пути сумма длин отрезков KK_1 и M_1M должна быть наименьшей. С помощью параллельного переноса сместим отрезок M_1M так, чтобы точка M_1 совпала с точкой K_1. По свойству параллельного переноса

$$KK_1 + K_1M_2 = KK_1 + M_1M,$$

т. е. наименьшей является и сумма длин отрезков KK_1 и K_1M_2. Следовательно, по неравенству треугольника точки K, K_1 и M_2 должны лежать на одной прямой.

Значит, для нахождения требуемого местоположения моста через канал достаточно сначала сместить точку M перпендикулярно берегам канала на его ширину, а затем соединить построенную точку M_2 с точкой K.

Искомой точкой K_1 будет точка пересечения этой прямой с линией берега канала, ближайшего к пункту K.



90 Равенство фигур

Две фигуры называются **равными**, если они движением переводятся одна в другую. Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна фигуре F'. В записи равенства треугольников: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что совмещаемые при движении вершины стоят на соответствующих местах. При таком условии



равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство, как мы его понимали до сих пор, выражают одно и то же.

Это значит, что если у двух треугольников соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны, то эти треугольники совмещаются движением. И обратно: если два треугольника совмещаются движением, то у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны. Докажем оба эти утверждения.

Пусть треугольник ABC совмещается движением с треугольником $A_1B_1C_1$, причём вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1 и C — в C_1. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то для наших треугольников $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что они совмещаются движением, причём вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1.

Подвергнем треугольник ABC преобразованию симметрии относительно прямой a, перпендикулярной к отрезку AA_1 и проходящей через его середину (рис. 208). Получим треугольник $A_1B_2C_2$. Если точки B_1 и B_2 различны, то подвергнем его симметрии относительно прямой b, которая проходит через точку A_1 и перпендикулярна к прямой B_1B_2. Получим треугольник $A_1B_1C_3$. Если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, так как углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_3$ рав-

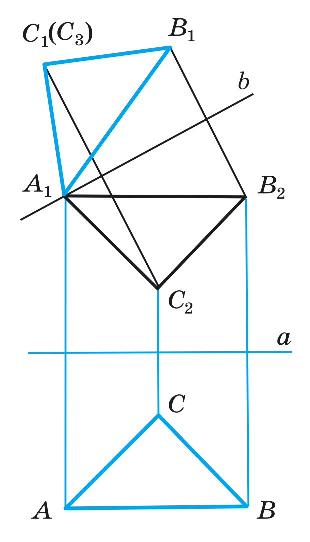


Рис. 208

ны, то лучи A_1C_1 и A_1C_3 совпадают, а так как отрезки A_1C_1 и A_1C_3 равны, то совпадают точки C_1 и C_3. Таким образом, треугольник ABC движением переведён в треугольник $A_1B_1C_1$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, то для доказательства надо ещё применить симметрию относительно прямой A_1B_1.

Контрольные вопросы

1. Какое преобразование фигуры называется движением?
2. Докажите, что точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
3. Во что переходят прямые, полупрямые, отрезки при движении?
4. Докажите, что при движении сохраняются углы.
5. Объясните, какие точки называются симметричными относительно данной точки.
6. Какое преобразование называется симметрией относительно данной точки?
7. Какая фигура называется центрально-симметричной?
8. Что такое центр симметрии фигуры? Приведите пример центрально-симметричной фигуры.
9. Докажите, что симметрия относительно точки есть движение.
10. Какие точки называются симметричными относительно данной прямой?
11. Какое преобразование называется симметрией относительно данной прямой?
12. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?
13. Что такое ось симметрии фигуры? Приведите пример.
14. Докажите, что симметрия относительно прямой есть движение.
15. Какое движение называется поворотом?
16. Что такое параллельный перенос?
17. Какие вы знаете свойства параллельного переноса?
18. Докажите существование и единственность параллельного переноса, переводящего данную точку в другую данную точку.
19. Какие полупрямые называются одинаково направленными; противоположно направленными?
20. Докажите, что если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены.
21. Какие фигуры называются равными?
22. Какие геометрические фигуры и их свойства можно увидеть на фотографиях (с. 125—133)? Приведите свои примеры из окружающего мира.

Задачи

Пункт 83

1. Докажите, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм.

2. Объясните, в какую фигуру переходит при движении квадрат.

Пункт 84

3. Даны точки A и B. Постройте точку B', симметричную точке B относительно точки A.

4. Решите предыдущую задачу, пользуясь только циркулем.

5. Докажите, что центр окружности является её центром симметрии.

6. При симметрии относительно некоторой точки точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.

7. Может ли у треугольника быть центр симметрии?

8. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

9. Докажите, что четырёхугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.

10. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке (рис. 209).

11. Что представляет собой фигура, симметричная относительно данной точки: 1) отрезку; 2) углу; 3) треугольнику?

Пункт 85

12. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

13. Решите задачу 12, пользуясь только циркулем.

14. Чему равны координаты точки, симметричной точке (−3; 4) относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат?

15. При симметрии относительно некоторой прямой точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.

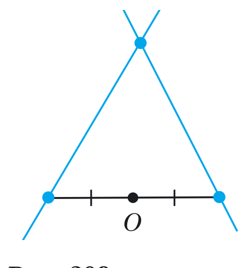


Рис. 209

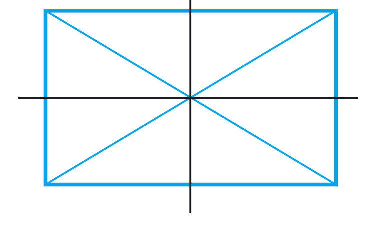


Рис. 210

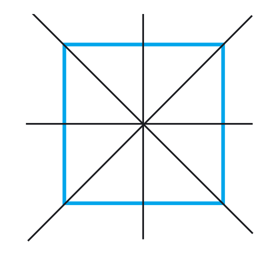


Рис. 211

16. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

17. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

18. Докажите, что если у треугольника есть ось симметрии, то: 1) она проходит через одну из его вершин; 2) треугольник равнобедренный.

19. Сколько осей симметрии у равностороннего треугольника?

20. Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются его осями симметрии (рис. 210).

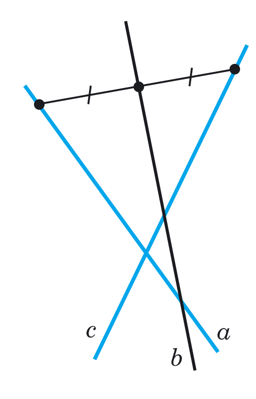


Рис. 212

21. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

22. Докажите, что диагонали квадрата и прямые, проходящие через точку их пересечения параллельно его сторонам, являются осями симметрии квадрата (рис. 211).

23. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии.

24. Даны три попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Как построить отрезок, перпендикулярный прямой b, с серединой на прямой b и концами на прямых a и c (рис. 212)? Всегда ли задача имеет решение?

Пункт 86

25. 1) Постройте точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол $60°$ по часовой стрелке.
2) Постройте фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол $60°$ по часовой стрелке.

26. Постройте фигуру, в которую переходит треугольник ABC при повороте его около вершины C на угол $60°$.

Пункт 87

27. Даны точки A, B, C. Постройте точку C', в которую переходит точка C при параллельном переносе, переводящем точку A в B.

28. Параллельный перенос задаётся формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки (0; 0), (1; 0), (0; 2)?

29. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, если известно, что:
1) точка (1; 2) переходит в точку (3; 4); 2) точка (2; −3) — в точку (−1; 5); 3) точка (−1; −3) — в точку (0; −2).

Пункт 88

30. При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0). В какую точку переходит начало координат?

31. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) точка (1; 2) переходит в точку (3; 4), а точка (0; 1) — в точку (−1; 0); 2) точка (2; −1) переходит в точку (1; 0), а точка (−1; 3) — в точку (0; 4)?

32. Прямые AB и CD параллельны. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

33. Докажите, что в задаче 32 лучи BA и CD противоположно направлены, если точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC.

34. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Среди лучей AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA назовите пары одинаково и противоположно направленных лучей.

Пункт 89

35. Четыре населённых пункта расположены в вершинах параллелограмма. В каком месте следует построить фабрику, чтобы сумма расстояний от неё до всех четырёх данных пунктов была наименьшей?

36. Как изменится ответ к предыдущей задаче, если населённые пункты находятся в вершинах выпуклого четырёхугольника?

37. Для снабжения водой двух населённых пунктов, расположенных по одну сторону канала, надо построить на его берегу водонапорную башню. Где должна находиться башня, чтобы суммарная длина труб от неё до населённых пунктов (по прямой) была наименьшей?

38. Две железнодорожные ветки m_1 и m_2 пересекаются под острым углом, внутри которого расположены населённые пункты A и B. Как проложить кратчайший путь автобуса по маршруту AM_1M_2B, где M_1 находится на ветке m_1, а M_2 — ветке m_2?

39. Два населённых пункта K и M расположены по разные стороны канала. В каком месте следует построить мост (перпендикулярно берегам канала) и прямолинейные дороги от населённых пунктов к мосту, чтобы путь между данными пунктами был кратчайшим?

40. По одну сторону от железной дороги расположены два населённых пункта. В каком месте следует построить железнодорожную платформу данной длины, чтобы сумма расстояний от неё до населённых пунктов была наименьшей? (Два случая.)

41. Три населённых пункта A, B и C расположены в вершинах остроугольного треугольника. Где следует построить комбинат, чтобы сумма расстояний от него до всех трёх пунктов была наименьшей?

42. Докажите, что в предыдущей задаче каждая сторона треугольника ABC видна из точки, в которой располагается комбинат, под углом $120°$.

Пункт 90

43. Докажите, что отрезки равной длины и углы с равной градусной мерой совмещаются движением.

44. У параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что параллелограммы равны, т. е. совмещаются движением.

45. Докажите, что ромбы равны, если у них равны диагонали.

46. Докажите, что две окружности одинакового радиуса равны.



Векторы

91 Абсолютная величина и направление вектора



Вектором мы будем называть направленный отрезок (рис. 213). **Направление вектора** определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a, b, c, ... Можно также обозначать вектор указанием его начала и конца. При этом начало вектора ставится на первом месте. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора иногда ставится стрелка или черта. Вектор на рисунке 213 можно обозначить так:

$$\bar{a},\ \vec{a} \text{ или } \overline{AB},\ \overrightarrow{AB}.$$

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **одинаково направленными**, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются **противоположно направленными**, если полупрямые AB и CD противоположно направлены. На рисунке 214 векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ противоположно направлены.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

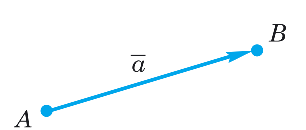


Рис. 213

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть **нулевым вектором**. Нулевой вектор обозначается нулём с чёрточкой ($\bar{0}$). О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю.

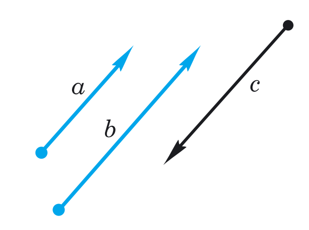


Рис. 214

92 Равенство векторов

Два вектора называются **равными**, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Из данного определения равенства векторов следует, что

равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. Обратно: **если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.**

Действительно, пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине (рис. 215).

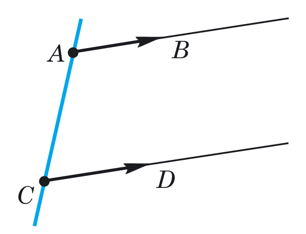


Рис. 215

Параллельный перенос, переводящий точку C в точку A, совмещает полупрямую CD с полупрямой AB, так как они одинаково направлены. А так как отрезки AB и CD равны, то при этом точка D совмещается с точкой B, т. е. параллельный перенос переводит вектор $\overline{CD}$ в вектор $\overline{AB}$. Значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, что и требовалось доказать.

Задача (2). Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Решение.

Подвергнем вектор $\overline{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 216). При этом переносе точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC. Следовательно, точка B переходит в точку C. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{DC}$, а значит, эти векторы равны.

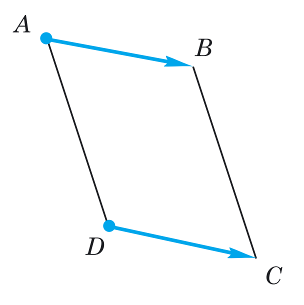


Рис. 216

Пусть $\bar{a}$ — вектор и A — произвольная точка. Тогда от точки A можно отложить один и только один вектор $\bar{a}'$, равный вектору $\bar{a}$.

Действительно, существует единственный параллельный перенос, при котором начало вектора $\bar{a}$ переходит в точку A. Вектор, в который переходит при этом вектор $\bar{a}$, и есть вектор $\bar{a}'$.

Для практического откладывания от данной точки (D) вектора, равного данному ($\overline{AB}$), можно воспользоваться задачей 2.

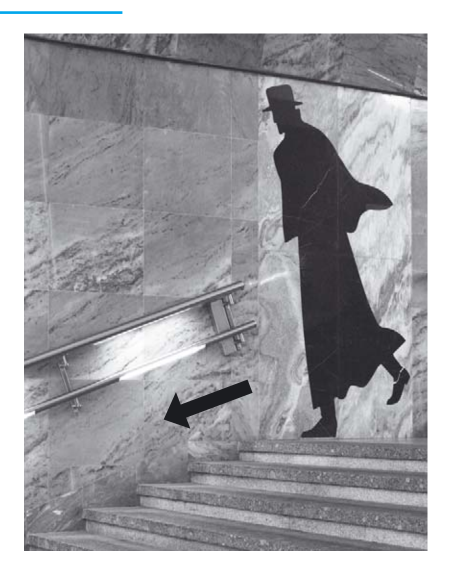
93 Координаты вектора

Пусть вектор $\bar{a}$ имеет началом точку A_1 (x_1; y_1), а концом точку A_2 (x_2; y_2). Координатами вектора $\bar{a}$ будем называть числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\bar{a}$ (a_1; a_2) или просто $\overline{(a_1; a_2)}$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора с координатами a_1 и a_2 равна $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно: **если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.**

Действительно, пусть точки A_1 (x_1; y_1) и A_2 (x_2; y_2) — начало и конец вектора $\bar{a}$. Так как равный ему вектор $\bar{a}'$ получается из вектора $\bar{a}$ параллельным переносом, то его началом и концом будут A'_1 ($x_1 + c$; $y_1 + d$), A'_2 ($x_2 + c$; $y_2 + d$) соответственно. Отсюда видно, что оба вектора $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ имеют одни и те же координаты: $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$.



Докажем теперь обратное утверждение. Пусть соответствующие координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A'_1A'_2}$ равны. Докажем, что векторы равны.

Пусть x'_1 и y'_1 — координаты точки A'_1, а x'_2 и y'_2 — координаты точки A'_2. По условию теоремы $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$. Отсюда $x'_2 = x_2 + x'_1 - x_1$,

$y'_2 = y_2 + y'_1 - y_1$. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x' = x + x'_1 - x_1, \; y' = y + y'_1 - y_1,$$

переводит точку A_1 в точку A'_1, а точку A_2 в точку A'_2, т. е. векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A'_1A'_2}$ равны, что и требовалось доказать.

Задача (7). Даны три точки A (1; 1), B (−1; 0), C (0; 1). Найдите такую точку D (x; y), чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

Решение.

Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты −2, −1. Вектор $\overline{CD}$ имеет координаты $x - 0$, $y - 1$. Так как $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$. Отсюда находим координаты точки D: $x = -2$, $y = 0$.

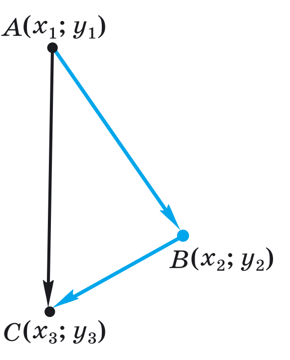


Рис. 217

94 Сложение векторов

Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами a_1, a_2 и b_1, b_2 называется вектор $\bar{c}$ с координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, т. е.

$$\bar{a}\ (a_1; a_2) + \bar{b}\ (b_1; b_2) = \bar{c}\ (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

Для любых векторов $\bar{a}$ (a_1; a_2), $\bar{b}$ (b_1; b_2), $\bar{c}$ (c_1; c_2)

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \; \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенств. Мы видим, что они равны. А векторы с соответственно равными координатами равны.

Теорема 10.1

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Доказательство.

Пусть A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3) — данные точки (рис. 217). Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, вектор $\overline{BC}$ имеет координаты $x_3 - x_2$ и $y_3 - y_2$. Следовательно, вектор $\overline{AB} + \overline{BC}$ имеет координаты $x_3 - x_1$ и $y_3 - y_1$. А это есть координаты вектора $\overline{AC}$. Значит, векторы $\overline{AB} + \overline{BC}$ и $\overline{AC}$ равны. Теорема доказана.

Теорема 10.1 даёт следующий способ построения суммы произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Надо

от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный вектору $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, будет суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 218). Такой способ получения суммы двух векторов называется **«правилом треугольника»** сложения векторов.

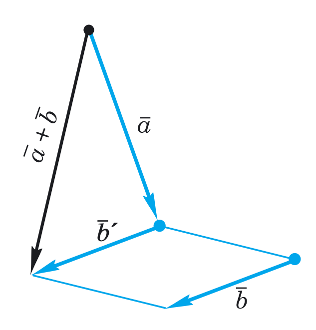


Рис. 218

Для векторов с общим началом их сумма изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (**«правило параллелограмма»**, рис. 219). Действительно, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, а $\overline{BC} = \overline{AD}$. Значит, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

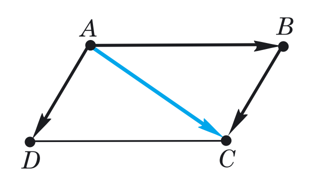


Рис. 219

Разностью векторов $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}$ $(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\bar{c}$ $(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ даёт вектор $\bar{a}$: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$:

$$c_1 = a_1 - b_1 \text{ и } c_2 = a_2 - b_2.$$

Задача (11). Даны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 220). Докажите, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

Решение.

Имеем $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. А это значит, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

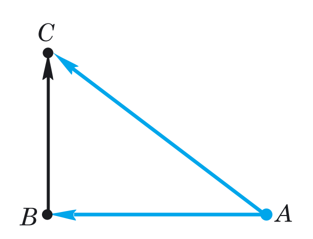


Рис. 220

Отсюда получается следующее правило для построения разности двух векторов.

Чтобы построить вектор, равный разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, надо отложить равные им векторы $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ от одной точки. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\bar{b}'$, а конец — с концом вектора $\bar{a}'$, будет разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 221).



95 Сложение сил

Силу, приложенную к телу, удобно изображать вектором, направление которого совпадает с направлением действия силы, а абсолютная величина пропорциональна величине силы. Как показывает опыт, при таком способе изображения сил равнодействующая двух или нескольких сил, приложенных к телу в одной точке, изображается суммой соответствующих им векторов.

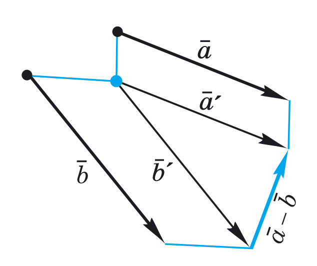
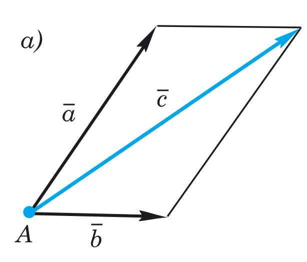


Рис. 221

На рисунке 222, *а* к телу в точке *A* приложены две силы, изображённые векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Равнодействующая этих сил изображается вектором

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Представление силы в виде суммы сил, действующих в двух заданных направлениях, называется разложением силы по этим направлениям. Так, на рисунке 222, *а* сила $\overline{c}$ разложена в сумму сил $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — составляющие силы $\overline{c}$. Удобно производить разложение вектора по двум перпендикулярным осям. В этом случае составляющие вектора называются **проекциями** вектора на оси (рис. 222, *б*).



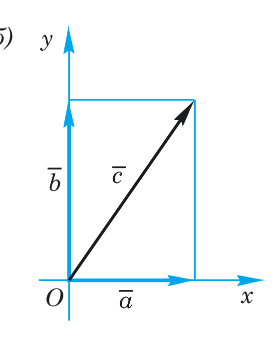


Рис. 222

Задача (16). С какой силой F надо удержать груз весом P на наклонной плоскости, чтобы он не сползал вниз (рис. 223)?

Решение.

Пусть O — центр тяжести груза, к которому приложена сила $\overline{P}$. Разложим вектор $\overline{P}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям, как показано на рисунке 223. Сила $\overline{OA}$ перпендикулярна наклонной плоскости и не вызывает перемещения груза. Сила $\overline{F}$, удерживающая груз, должна быть равной по величине и противоположной по направлению силе $\overline{OB}$. Поэтому $F = P \sin \alpha$.

96 Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{(a_1; a_2)}$ на число λ называется вектор $\overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}$, т. е.

$$\overline{(a_1; a_2)}\lambda = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}.$$

По определению $\overline{(a_1; a_2)}\lambda = \lambda\overline{(a_1; a_2)}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует:

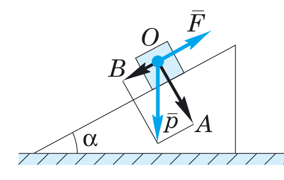


Рис. 223

Для любого вектора $\overline{a}$ и чисел λ, μ

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}.$$

Для любых двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и числа λ

$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

Теорема 10.2

Абсолютная величина вектора $\lambda\overline{a}$ равна $|\lambda|\ |\overline{a}|$. Направление вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a} \neq \overline{0}$ совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.

Доказательство.

Построим векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равные $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ соответственно (O — начало координат). Пусть a_1

и a_2 — координаты вектора $\bar{a}$. Тогда координатами точки A будут числа a_1 и a_2, а координатами точки B будут λa_1 и λa_2 (рис. 224). Уравнение прямой OA имеет вид: $\alpha x + \beta y = 0$.

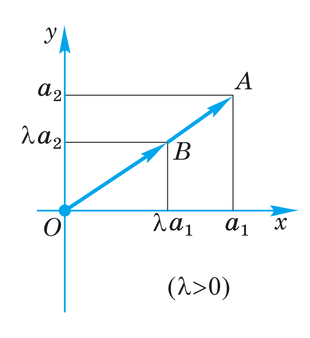
Так как уравнению удовлетворяют координаты точки A $(a_1; a_2)$, то ему удовлетворяют и координаты точки B $(\lambda a_1; \lambda a_2)$. Отсюда следует, что точка B лежит на прямой OA. Координаты c_1 и c_2 любой точки C, лежащей на полупрямой OA, имеют те же знаки, что и координаты a_1 и a_2 точки A, а координаты любой точки, которая лежит на полупрямой, дополнительной к OA, имеют противоположные знаки.

Поэтому если $\lambda > 0$, то точка B лежит на полупрямой OA, а следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ одинаково направлены. Если $\lambda < 0$, то точка B лежит на дополнительной полупрямой, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ противоположно направлены.

Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна:

$$|\lambda\bar{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda||\bar{a}|.$$

Теорема доказана.



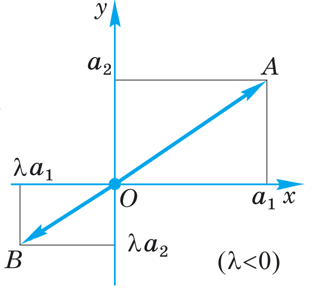


Рис. 224

Задача (17). Даны две точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

Решение.

Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$. Вектор $\overline{BA}$ имеет координаты $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$. Мы видим, что $\overline{AB} = (-1)\,\overline{BA}$. А значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

97 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 225). Коллинеарные векторы направлены либо одинаково, либо противоположно.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — отличные от нулевого коллинеарные векторы. Докажем, что существует число λ, такое, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

Допустим, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены. Векторы $\bar{b}$ и $\left(\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\right)\bar{a}$ одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину $|\bar{b}|$. Значит, они равны:

$$\bar{b} - \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \lambda\bar{a}, \ \ \lambda = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}.$$

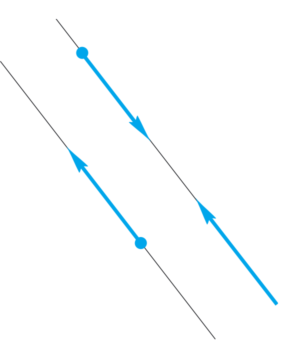


Рис. 225

В случае противоположно направленных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ аналогично заключаем, что

$$\bar{b} = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \lambda\bar{a}, \ \ \lambda = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — отличные от нулевого неколлинеарные векторы. Докажем, что

любой вектор $\bar{c}$ можно представить в виде
$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}.$$

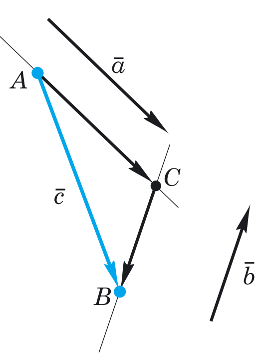


Рис. 226

Пусть A и B — начало и конец вектора $\bar{c}$ (рис. 226). Проведём через точки A и B прямые, параллельные векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Они пересекутся в некоторой точке C. Имеем $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Так как векторы $\bar{a}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, то $\overline{AC} = \lambda\bar{a}$. Так как векторы $\overline{CB}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то $\overline{CB} = \mu\bar{b}$. Таким образом, $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, что и требовалось доказать.

98 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ $(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}$ $(b_1;\ b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Для скалярного произведения векторов используется такая же запись, как и для произведения чисел. Скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$ и называется скалярным квадратом. Очевидно, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что

для любых векторов $\bar{a}\,(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}\,(c_1;\ c_2)$
$(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.

Действительно, левая часть равенства есть $(a_1 + b_1)\ c_1 + (a_2 + b_2)\ c_2$, а правая $a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$. Очевидно, они равны.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол BAC. Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема 10.3

Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

Доказательство.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — данные векторы и φ — угол между ними. Имеем

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) =$$
$$= (\bar{a} + \bar{b})\,\bar{a} + (\bar{a} + \bar{b})\,\bar{b} =$$
$$= \bar{a}\bar{a} + \bar{b}\bar{a} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{b} =$$
$$= \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2,$$

или

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2\bar{a}\bar{b}.$$

Отсюда видно, что скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$ выражается через длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a} + \bar{b}$, а поэтому не зависит от выбора системы координат, т. е. скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Возьмём систему координат xy так, как показано на рисунке 227. При таком выборе системы координат координатами вектора $\bar{a}$ будут $|\bar{a}|$ и 0, а координатами вектора $\bar{b}$ будут $|\bar{b}|\cos\varphi$ и $|\bar{b}|\sin\varphi$. Скалярное произведение:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi + 0|\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 10.3 следует, что

если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно: **если скалярное произведение отличных от нулевого векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.**

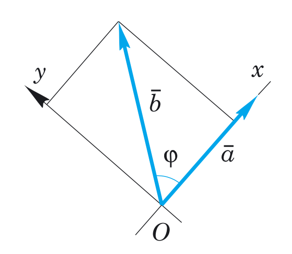


Рис. 227

Задача (38). Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

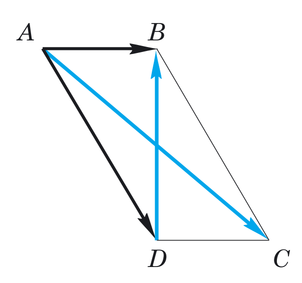


Рис. 228

Решение.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 228). Имеем векторные равенства

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}, \quad \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Возведём эти равенства в квадрат. Получим

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2.$$

Сложим эти равенства почленно. Получим

$$2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2.$$

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то это равенство и означает, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, что и требовалось доказать.

99 Разложение вектора по координатным осям

Вектор называется **единичным**, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются **координатными векторами** или **ортами**. Мы будем их обозначать $\overline{e}_1$ (1; 0) на оси x и $\overline{e}_2$ (0; 1) на оси y (рис. 229).

Так как координатные векторы отличны от нулевого и не коллинеарны, то любой вектор $\overline{a}$ (a_1; a_2) допускает разложение по этим векторам:

$$\overline{a} = \lambda\overline{e}_1 + \mu\overline{e}_2. \qquad (*)$$

Найдём коэффициенты λ и μ этого разложения. Умножим обе части равенства (*) на вектор $\overline{e}_1$: $\overline{a} \cdot \overline{e}_1 = \lambda\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1 + \mu\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_1$. Так как

$$\overline{a}(a_1;\ a_2) \cdot \overline{e}_1(1;\ 0) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1,$$

$$\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1 = 1 \text{ и } \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_1 = 0,$$

то получаем $a_1 = \lambda$.

Аналогично, умножая обе части равенства (*) на вектор $\overline{e}_2$, получим $a_2 = \mu$.

Таким образом, для любого вектора $\overline{a}$ (a_1; a_2) получается разложение $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2$.

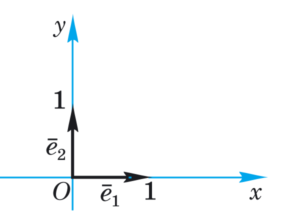


Рис. 229

Контрольные вопросы

1. Что такое вектор? Как обозначаются векторы?
2. Какие векторы называются одинаково направленными (противоположно направленными)?
3. Что такое абсолютная величина вектора?
4. Что такое нулевой вектор?
5. Какие векторы называются равными?
6. Докажите, что равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. И обратно: одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине, равны.
7. Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.
8. Что такое координаты вектора? Чему равна абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2?
9. Докажите, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, а векторы с соответственно равными координатами равны.
10. Дайте определение суммы векторов.
11. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
12. Докажите, что для любых трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

    $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
13. Докажите векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.
14. Докажите, что для получения суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, равен $\bar{a} + \bar{b}$.
15. Сформулируйте «правило параллелограмма» сложения векторов.
16. Дайте определение разности векторов.
17. Дайте определение умножения вектора на число.
18. Докажите, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a} \neq \bar{0}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.
19. Какие векторы называются коллинеарными?
20. Докажите, что если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличны от нулевого вектора и не коллинеарны, то любой вектор $\bar{c}$ можно представить в виде $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.
21. Дайте определение скалярного произведения векторов.
22. Докажите, что для любых трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

    $(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.
23. Как определяется угол между векторами?
24. Чему равен угол между одинаково направленными векторами?
25. Докажите, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

26. Докажите, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно: если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Задачи

Пункт 91

1. На прямой даны точки A, B, C, причём точка B лежит между точками A и C. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ назовите одинаково направленные и противоположно направленные.

Пункт 92

2. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

3. Даны вектор $\overline{AB}$ и точка C. Отложите от точки C вектор, равный вектору $\overline{AB}$, если:
1) точка C лежит на прямой AB;
2) точка C не лежит на прямой AB.

Пункт 93

4. Векторы $\bar{a}$ (2; 4), $\bar{b}$ (−1; 2), $\bar{c}$ (c_1; c_2) отложены от начала координат. Чему равны координаты их концов?

5. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ (5; m) равна 13, а вектора $\bar{b}$ (n; 24) равна 25. Найдите m и n.

6. Даны точки A (0; 1), B (1; 0), C (1; 2), D (2; 1). Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

7. Даны три точки A (1; 1), B (−1; 0), C (0; 1). Найдите такую точку D (x; y), чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

Пункт 94

8. Найдите вектор $\bar{c}$, равный сумме векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и абсолютную величину вектора $\bar{c}$, если: 1) $\bar{a}$ (1; −4), $\bar{b}$ (−4; 8); 2) $\bar{a}$ (2; 5), $\bar{b}$ (4; 3).

9. Дан треугольник ABC. Найдите сумму векторов: 1) $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$; 3) $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$; 4) $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

10. Найдите вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ и его абсолютную величину, если: 1) $\bar{a}$ (1; −4), $\bar{b}$ (−4; 8); 2) $\bar{a}$ (−2; 7), $\bar{b}$ (4; −1).

11. Даны векторы с общим началом: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 220). Докажите, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

12. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M. Выразите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\bar{a} = \overline{AM}$, $\bar{b} = \overline{BM}$ (рис. 230).

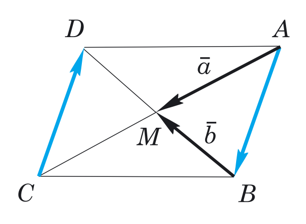


Рис. 230

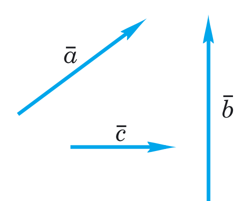


Рис. 231

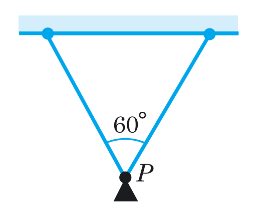


Рис. 232

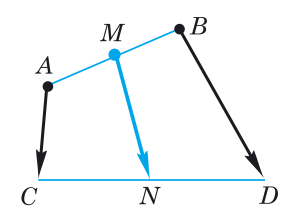


Рис. 233

13. Начертите три произвольных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, как на рисунке 231. А теперь постройте векторы, равные:
1) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$; 2) $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$; 3) $-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

14. 1) Докажите, что для векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ имеет место неравенство $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.
2) Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место неравенство $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

■ Пункт 95

15. К горизонтальной балке на двух равных нитях подвешен груз весом P. Определите силы натяжения нитей (рис. 232).

16. С какой силой F надо удерживать груз весом P на наклонной плоскости, чтобы он не сползал вниз?

■ Пункт 96

17. Даны две точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

18. Докажите, что векторы $\bar{a}$ (1; 2) и $\bar{b}$ (0,5; −1) одинаково направлены, а векторы $\bar{c}$ (−1; 2) и $\bar{d}$ (0,5; −1) противоположно направлены.

19. Даны векторы $\bar{a}$ (3; 2) и $\bar{b}$ (0; −1). Найдите вектор $\bar{c} = -2\bar{a} + 4\bar{b}$ и его абсолютную величину.

20. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна 5. Найдите λ, если: 1) $\bar{a}$ (−6; 8); 2) $\bar{a}$ (3; −4); 3) $\bar{a}$ (5; 12).

21. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

22. Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите векторное равенство
$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ (рис. 233).

23. Дан параллелограмм $ABCD$, $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ (рис. 234). Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

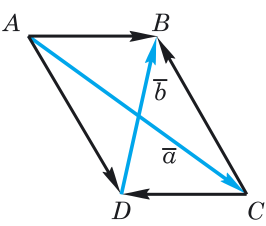


Рис. 234

Пункт 97

24. Докажите, что у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно: если у двух ненулевых векторов соответствующие координаты пропорциональны, то эти векторы коллинеарны.

25. Даны векторы $\bar{a}$ (2; −4), $\bar{b}$ (1; 1), $\bar{c}$ (1; −2), $\bar{d}$ (−2; −4). Укажите пары коллинеарных векторов. Какие из данных векторов одинаково направлены, а какие — противоположно направлены?

26. Известно, что векторы $\bar{a}$ (1; −1) и $\bar{b}$ (−2; m) коллинеарны. Найдите, чему равно m.

27. Даны векторы $\bar{a}$ (1; 0), $\bar{b}$ (1; 1) и $\bar{c}$ (−1; 0). Найдите такие числа λ и μ, чтобы имело место векторное равенство $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

Пункт 98

28. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(\bar{a}\bar{b})^2 \leqslant \bar{a}^2\bar{b}^2$.

29. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ (1; 2) и $\bar{b}\left(1; -\frac{1}{3}\right)$.

30. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} + \bar{b}$, если известно, что абсолютные величины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны 1, а угол между ними 60°.

31. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{a} + \bar{b}$ задачи 30.

32. Даны вершины треугольника A (1; 1), B (4; 1), C (4; 5). Найдите косинусы углов треугольника.

33. Найдите углы треугольника с вершинами $A\,(0; \sqrt{3})$, $B\,(2; \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

34. Докажите, что векторы $\bar{a}$ (m; n) и $\bar{b}$ ($-n$; m) перпендикулярны или равны нулю.

35. Даны векторы $\bar{a}$ (3; 4) и $\bar{b}$ (m; 2). При каком значении m данные векторы перпендикулярны?

36. Даны векторы $\bar{a}$ (1; 0) и $\bar{b}$ (1; 1). Найдите такое число λ, чтобы вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

37. Докажите, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ отличны от нуля и перпендикулярны.

38. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

39. Даны стороны треугольника a, b и c. Найдите его медианы m_a, m_b и m_c.

40. Докажите, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна, есть

окружность с центром в середине отрезка, соединяющего данные точки.

41. Векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

42. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

43. Даны четыре точки A (1; 1), B (2; 3), C (0; 4), D (−1; 2). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

44. Даны четыре точки A (0; 0), B (1; 1), C (0; 2), D (−1; 1). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — квадрат.

Пункт 99

45. Среди векторов $\overline{a}\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $\overline{b}\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\overline{c}$ (0; −1), $\overline{d}\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ найдите единичные и укажите, какие из этих векторов коллинеарны.

46. Найдите единичный вектор $\overline{e}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ (6; 8) и одинаково с ним направленный.

47. Даны координатные векторы $\overline{e}_1$ (1; 0) и $\overline{e}_2$ (0; 1). Чему равны координаты вектора $2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2$?

48. 1) Даны три точки O, A, B. Точка X делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, считая от точки A. Выразите вектор $\overline{OX}$ через векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$.
2) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2 : 1, считая от соответствующих вершин.

49. Докажите, что проекция $\overline{a}$ вектора $\overline{c}$ на ось абсцисс с координатным вектором $\overline{e}_1$ (1; 0) задаётся формулой

$$\overline{a} = k\overline{e}_1, \text{ где } k = \overline{c}\,\overline{e}_1.$$

50. Докажите, что проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось.


9 класс
C_2
C_1
B_2
B_1
A_2
A_1
O
A
B
X
O
B
A



§ 11 Подобие фигур

100 Преобразование подобия

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (рис. 235). Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F', то $X'Y' = kXY$, причём число k одно и то же для всех точек X, Y. Число k называется **коэффициентом подобия**. При $k = 1$ преобразование подобия, очевидно, является движением.

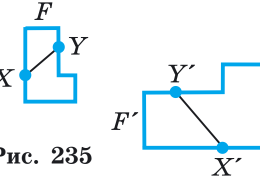


Рис. 235

Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка (рис. 236). Проведём через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нём отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k — положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая её точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется **гомотетией относительно центра O**. Число k называется **коэффициентом гомотетии**, фигуры F и F' называются **гомотетичными**.

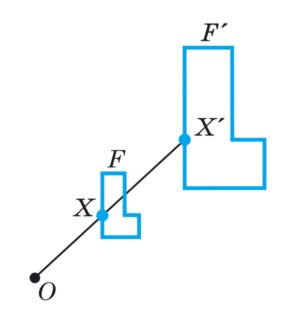


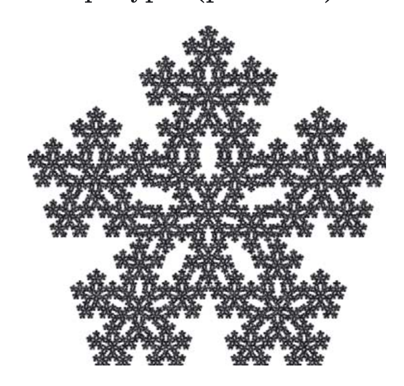
Рис. 236

Теорема 11.1

Гомотетия есть преобразование подобия.

Доказательство.

Пусть O — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии, X и Y — две произвольные точки фигуры (рис. 237).







При гомотетии точки X и Y переходят в точки X' и Y' на лучах OX и OY соответственно, причём $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Отсюда следуют векторные равенства

$$\overline{OX'} = k\overline{OX},\ \overline{OY'} = k\overline{OY}.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим

$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = k\,(\overline{OY} - \overline{OX}).$$

Так как

$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'},\ \overline{OY} - \overline{OX} = \overline{XY},$$

то

$$\overline{X'Y'} = k\overline{XY}.$$

Значит, $|\overline{X'Y'}| = k\,|\overline{XY}|$, т. е. $X'Y' = kXY$. Следовательно, гомотетия есть преобразование подобия. Теорема доказана.

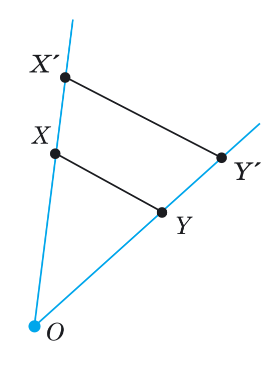
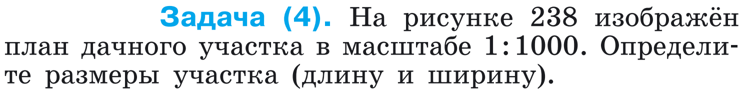


Рис. 237



Преобразование подобия широко применяется на практике при выполнении чертежей деталей машин, сооружений, планов местности и др. Эти изображения представляют собой подобные преобразования воображаемых изображений в натуральную величину. Коэффициент подобия при этом называется **масштабом**. Например, если участок местности изображается в масштабе 1:100, то это значит, что одному сантиметру на плане соответствует 1 м на местности.



Задача (4). На рисунке 238 изображён план дачного участка в масштабе 1:1000. Определите размеры участка (длину и ширину).

Решение.

Длина и ширина участка на плане равны 5,3 см и 3,6 см. Так как план выполнен в масштабе 1:1000, то размеры участка равны соответственно $3{,}6 \times 1000$ см $= 36$ м, $5{,}3 \times 1000$ см $= 53$ м.

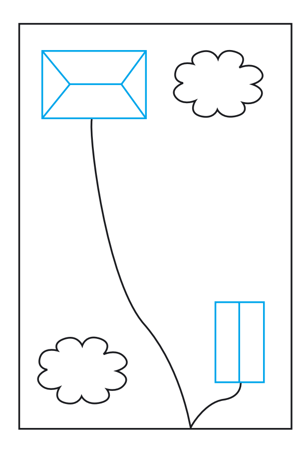


Рис. 238

101 Свойства преобразования подобия

Так же как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причём если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Отсюда следует, что

преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки.

Докажем, что

преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.

Действительно, пусть угол ABC преобразованием подобия с коэффициентом k переводится в угол $A_1B_1C_1$ (рис. 239). Подвергнем угол ABC преобразованию гомотетии относительно его вершины B с коэффициентом гомотетии k. При этом точки A и C перейдут в точки A_2 и C_2. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует равенство углов A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$. Значит, углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны, что и требовалось доказать.

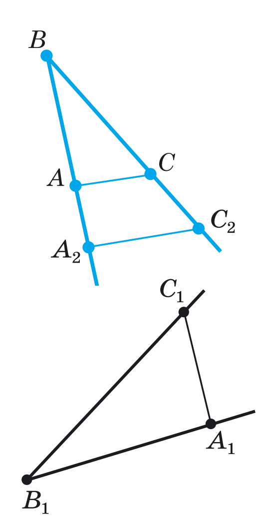


Рис. 239

102 Подобие фигур

Две фигуры называются **подобными**, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: ∾. Запись $F \backsim F'$ читается так: «Фигура F подобна фигуре F'».





Докажем, что

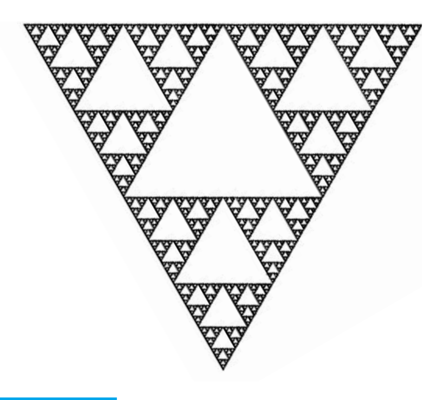
если фигура F_1 подобна фигуре F_2, а фигура F_2 подобна фигуре F_3, то фигуры F_1 и F_3 подобны.

Пусть X_1 и Y_1 — две произвольные точки фигуры F_1. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти точки в точки X_2, Y_2, для которых $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$.

Преобразование подобия, переводящее фигуру F_2 в F_3, переводит точки X_2 и Y_2 в точки X_3 и Y_3, для которых $X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$. Из равенств

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

следует, что $X_3Y_3 = k_1k_2X_1Y_1$. А это значит, что преобразование фигуры F_1 в F_3,



получающееся при последовательном выполнении двух преобразований подобия, есть подобие. Следовательно, фигуры F_1 и F_3 подобны, что и требовалось доказать.

В записи подобия треугольников: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B — в B_1 и C — в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что

у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны. В частности, **у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$**

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

103 Признак подобия треугольников по двум углам

Теорема 11.2

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство.

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Пусть $h = \frac{AB}{A_1B_1}$. Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 240). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$. А значит, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ $\angle A = \angle A_2$, $\angle B = \angle B_2$. Далее, $A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по второму признаку (по стороне и прилежащим к ней углам).

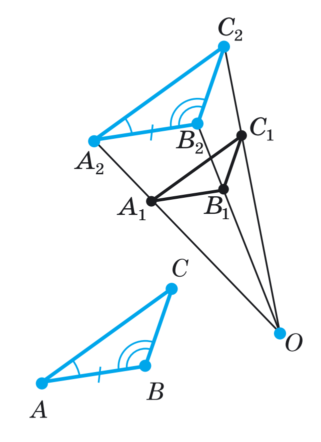


Рис. 240

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.



Задача (15). Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

Решение (рис. 241).

У $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C$ угол при вершине C общий, а углы CA_1B_1 и CAB равны как соответствующие углы параллельных AB и A_1B_1 с секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ по двум углам.

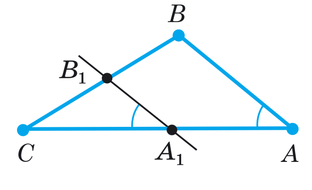


Рис. 241

104 Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Теорема 11.3

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

Доказательство (аналогично доказательству теоремы 11.2).

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$ и $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 242). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle C_2 = \angle C_1$. А значит, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ $\angle C = \angle C_2$. Далее, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$, $B_2C_2 = kB_1C_1 = BC$.

Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними).

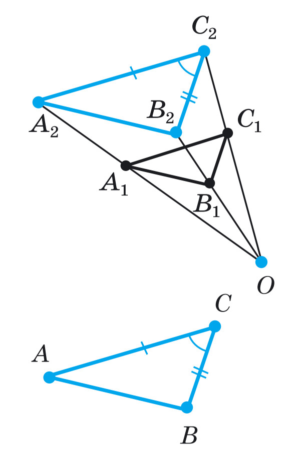


Рис. 242

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

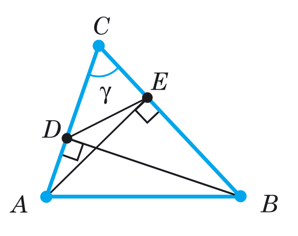


Рис. 243

Задача (31). В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD (рис. 243). Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Решение.

У треугольников ABC и EDC угол при вершине C общий. Докажем пропорциональность сторон треугольников, прилежащих к этому углу. Имеем $EC = AC \cos \gamma$, $DC = BC \cos \gamma$, т. е. стороны, прилежащие к углу C, у треугольников пропорциональны. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ по двум сторонам и углу между ними.

105 Признак подобия треугольников по трём сторонам

Теорема 11.4

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство (аналогично доказательству теоремы 11.2).

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии (рис. 244). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, у треугольников соответствующие стороны равны:

$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB,\ A_2C_2 = kA_1C_1 = AC,$$
$$B_2C_2 = kB_1C_1 = BC.$$

Следовательно, треугольники равны по третьему признаку (по трём сторонам). Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

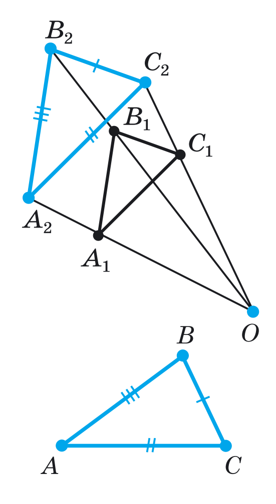


Рис. 244

Задача (36). Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.



Решение.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — подобные треугольники. Тогда стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны сторонам треугольника ABC, т. е. $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Складывая эти равенства почленно, получим

$$A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k\,(AB + BC + AC).$$

Отсюда

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}{AB + BC + AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

т. е. периметры треугольников относятся как соответствующие стороны.

106 Подобие прямоугольных треугольников

У прямоугольного треугольника один угол прямой. Поэтому по теореме 11.2

для подобия двух прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по равному острому углу.

С помощью этого признака подобия прямоугольных треугольников докажем некоторые соотношения в треугольниках.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведём высоту CD из вершины прямого угла (рис. 245).

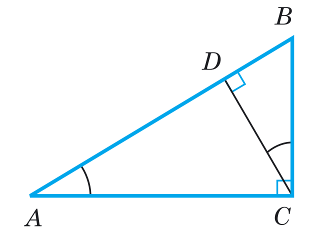


Рис. 245

Треугольники ABC и CBD имеют общий угол при вершине B. Следовательно, они подобны: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Из подобия треугольников следует пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \text{ или } BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Это соотношение обычно формулируют так:

катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Прямоугольные треугольники ACD и CBD также подобны. У них равны острые углы при вершинах A и C. Из подобия этих треугольников следует пропорциональность их сторон:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ или } CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Это соотношение обычно формулируют так:

высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Докажем следующее свойство биссектрисы треугольника:

биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (рис. 246). Если треугольник ABC равнобедренный с основанием AB, то указанное свойство биссектрисы очевидно, так как в этом случае биссектриса CD является и медианой.

Рассмотрим общий случай, когда $AC \neq BC$. Опустим перпендикуляры AF и BE из вершин A и B на прямую CD.

Прямоугольные треугольники ACF и BCE подобны, так как у них равны острые углы при вершине C. Из подобия треугольников следует пропорциональность сторон:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BE}.$$

Прямоугольные треугольники ADF и BDE тоже подобны. У них углы при вершине D равны как вертикальные. Из подобия треугольников следует пропорциональность сторон:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AD}{BD}.$$

Сравнивая это равенство с предыдущими, получим:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ или } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

т. е. отрезки AD и BD пропорциональны сторонам AC и BC, что и требовалось доказать.

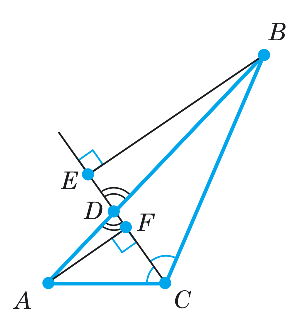


Рис. 246

107 Углы, вписанные в окружность

Угол разбивает плоскость на две части. Каждая из частей называется **плоским углом**. На рисунке 247 закрашен один из плоских углов со сторонами a и b. Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными**. Если плоский угол является частью полуплоскости, то его градусной мерой называется градусная мера обычного угла с теми же сторонами. Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера принимается равной $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла (рис. 248).

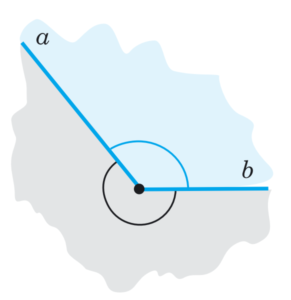


Рис. 247

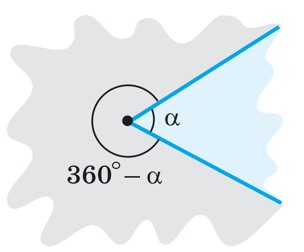


Рис. 248

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу (рис. 249). **Градусной мерой дуги окружности** называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность**. Угол BAC на рисунке 250 вписан в окружность. Его вершина A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C. Говорят также, что угол A опирается на хорду BC. Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той из этих дуг, которая не содержит точку A, называется центральным углом, **соответствующим данному вписанному углу.**

Теорема 11.5

Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.



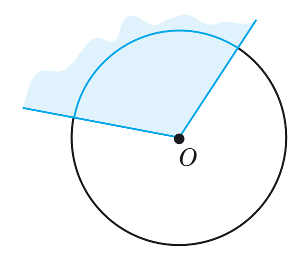


Рис. 249

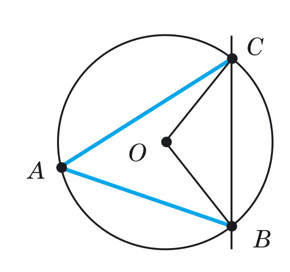


Рис. 250

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности (рис. 251, *а*).

Треугольник *AOB* равнобедренный, так как у него стороны *OA* и *OB* равны как радиусы. Поэтому углы *A* и *B* треугольника равны. А так как их сумма равна внешнему углу треугольника при вершине *O*, то угол *B* треугольника равен половине угла *AOC*, что и требовалось доказать.

Общий случай сводится к рассмотренному частному случаю проведением вспомогательного диаметра *BD* (рис. 251, *б*, *в*). В случае, представленном на рисунке 251, *б*,

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD =$$
$$= \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

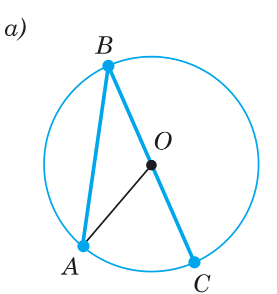
В случае, представленном на рисунке 251, *в*,

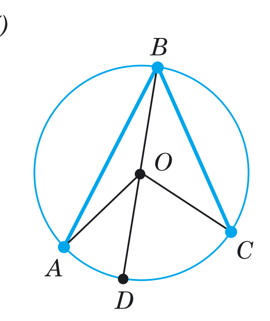
$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD =$$
$$= \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Теорема доказана полностью.

Из теоремы 11.5 следует, что

вписанные углы, стороны которых проходят через точки *A* и *B* окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой *AB*, равны (рис. 252). В частности, **углы, опирающиеся на диаметр, прямые.**





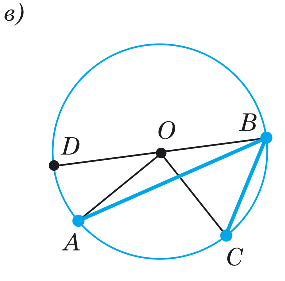


Рис. 251

108 Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

Если хорды *AB* и *CD* окружности пересекаются в точке *S*, то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Докажем сначала, что треугольники *ASD* и *CSB* подобны (рис. 253). Вписанные углы *DCB* и *DAB* равны по следствию из теоремы 11.5. Углы *ASD* и *BSC* равны как вертикальные. Из равенства указанных углов следует, что треугольники *ASD* и *CSB* подобны.

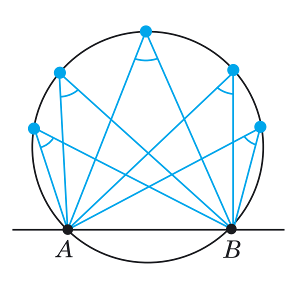


Рис. 252

Из подобия треугольников следует пропорция $\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}$.

Отсюда $AS \cdot BS = CS \cdot DS$, что и требовалось доказать.

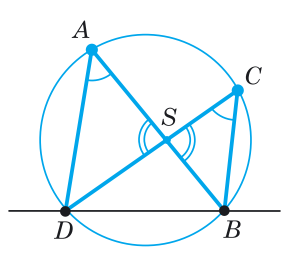


Рис. 253

Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

Пусть точки A и C — ближайшие к точке P точки пересечения секущих с окружностью (рис. 254). Треугольники PAD и PCB подобны. У них угол при вершине P общий, а углы при вершинах B и D равны по свойству углов, вписанных в окружность. Из подобия треугольников следует пропорция $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$.

Отсюда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, что и требовалось доказать.

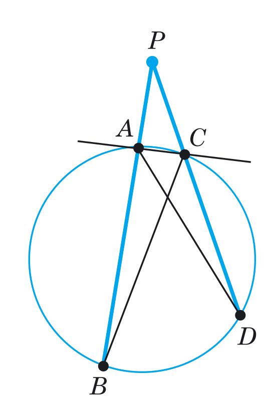
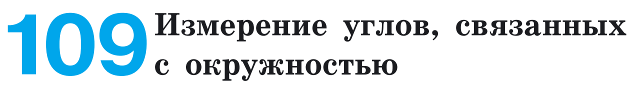


Рис. 254



109 Измерение углов, связанных с окружностью

Наряду с вписанными углами в окружности можно измерять и другие углы, вершины которых на этой окружности не лежат, но их стороны пересекают окружность или касаются её.

Теорема 11.6

1) Угол, вершина которого лежит внутри окружности, равен половине суммы двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между их сторонами и их продолжениями.

2) Угол, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают её, равен половине разности двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между его сторонами.

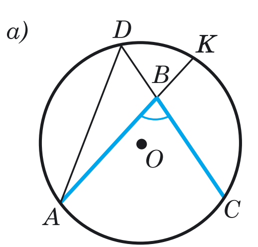
Доказательство.

Пусть вершина B угла ABC лежит внутри окружности (рис. 255, *а*) или вне её (рис. 255, *б*). Проведём хорду AD, где D — точка пересечения прямой BC с окружностью, отличная от точки C.

В первом случае угол B является внешним углом треугольника ABD и поэтому равен сум-

ме углов A и D этого треугольника. Углы A и D как вписанные в окружность равны половинам соответствующих им центральных углов. А именно, угол D равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга AC, заключённая между сторонами данного угла ABC, а угол A равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга DK, заключённая между продолжениями его сторон. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Во втором случае угол B является внутренним углом треугольника ABD и поэтому равен разности вписанных углов ADC и A. Угол ADC равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга AC, заключённая между сторонами данного угла ABC, а угол A равен половине центрального угла, соответствующей дугой окружности которого является дуга DK, которая также заключена между сторонами данного угла. Отсюда следует второе утверждение теоремы. Теорема доказана.



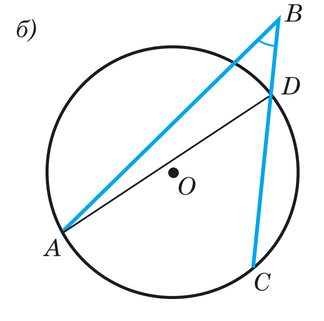


Рис. 255

Теорема 11.7

Если из точки B к окружности с центром O проведены касательная AB и хорда BC, то

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

Доказательство.

Проведём диаметр BD окружности (рис. 256). Угол ABC равен или разности углов ABD и CBD (рис. 256, *а*), или их сумме (рис. 256, *б*). Так как угол ABD прямой, то он равен половине развёрнутого центрального угла. А вписанный угол CBD равен половине центрального угла COD. Поэтому данный угол ABC равен половине центрального угла, которому соответствует меньшая дуга BC окружности в случае *а* и бóльшая дуга BC окружности в случае *б*. Утверждение справедливо также и в случае, когда хорда BC является диаметром окружности. Теорема доказана.

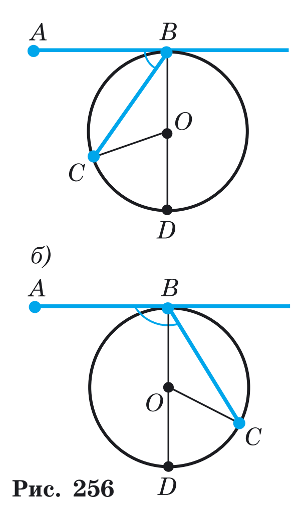


Рис. 256

Контрольные вопросы

1. Что такое преобразование подобия?
2. Что такое гомотетия (центр гомотетии, коэффициент гомотетии)?
3. Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.

4. Какие свойства преобразования подобия вы знаете? Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.
5. Какие фигуры называются подобными?
6. Каким знаком обозначается подобие фигур? Как записывается подобие треугольников?
7. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум углам.
8. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.
9. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по трём сторонам.
10. Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
11. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.
12. Докажите, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
13. Что такое плоский угол?
14. Что такое центральный угол?
15. Какой угол называется вписанным в окружность?
16. Докажите, что вписанный в окружность угол равен половине соответствующего центрального угла.
17. Докажите, что угол, вершина которого лежит внутри окружности, равен полусумме двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между сторонами данного угла и их продолжениями.
18. Докажите, что угол, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, равен полуразности двух центральных углов, которым соответствуют дуги окружности, заключённые между сторонами данного угла.
19. Сформулируйте и докажите теорему об угле между хордой и касательной к окружности.
20. Докажите свойства отрезков пересекающихся хорд и свойства отрезков секущих.
21. Какие свойства геометрических фигур иллюстрируют фотографии (с. 154—162)? Приведите свои примеры, иллюстрирующие эти свойства.

Задачи

■ Пункт 100

1. При гомотетии точка X переходит в точку X', а точка Y — в точку Y'. Как найти центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой?

2. При гомотетии точка X переходит в точку X'. Постройте центр гомотетии, если коэффициент гомотетии равен 2.
3. Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии равным 2.
4. На рисунке 238 изображён план дачного участка в масштабе 1 : 1000. Определите размеры участка (длину и ширину).

Пункт 102

5. Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?
6. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1?
7. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.
8. Даны угол и внутри его точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.
9. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах.

Пункт 103

10. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.
11. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.
12. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.
13. Решите задачу 12 при условии, что $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.
14. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.
15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.
16. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах (рис. 257). Вычислите сторону квадрата.

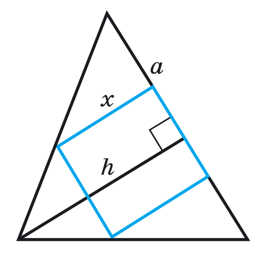


Рис. 257

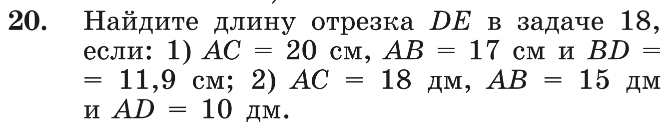
17. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношении $m : n$, считая от вершины C. В каком отношении она делит сторону BC?

Рис. 258

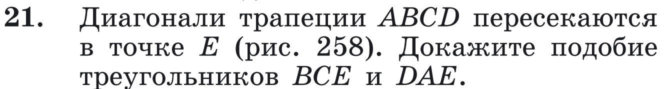
18. В треугольнике ABC проведён отрезок DE, параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите AD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см и $DE = 15$ см.



19. В задаче 18 найдите отношение $AD : BD$, если известно, что $AC : DE = 55 : 28$.



20. Найдите длину отрезка DE в задаче 18, если: 1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11{,}9$ см; 2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 10$ дм.



21. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 258). Докажите подобие треугольников BCE и DAE.

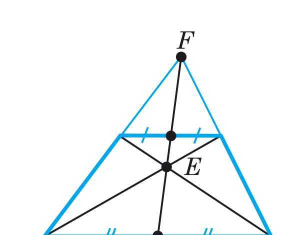


Рис. 259

22. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m : n$.

23. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении $m : n$. В каком отношении она делит другое основание?

24. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 м и 27 м.

25. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m : n$. В каком отношении делит она другую боковую сторону?

26. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.

27. Найдите высоту треугольника AED из задачи 26, опущенную на сторону AD, если $BC = 7$ см, $AD = 21$ см и высота трапеции равна 3 см.

28. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон — в точке F. Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам (рис. 259).

29. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом 36° проведена биссектриса AD. 1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD. 2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a.

Пункт 104

30. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Углы B и B_1 равны. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

31. В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AE и BD. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

32. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Найдите углы треугольника DEF, зная углы треугольника ABC (рис. 260).

33. Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче 32 лежат на высотах треугольника ABC.

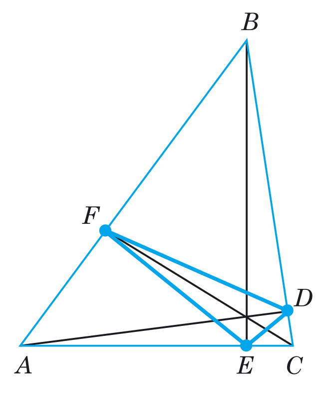


Рис. 260

Пункт 105

34. Подобны ли два равносторонних треугольника?

35. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;

2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;

3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 13$ см?

36. Докажите, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

37. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

38. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

Пункт 106

39. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 40°, а у другого угол, равный: 1) 50°; 2) 60°?

40. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит её на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

41. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

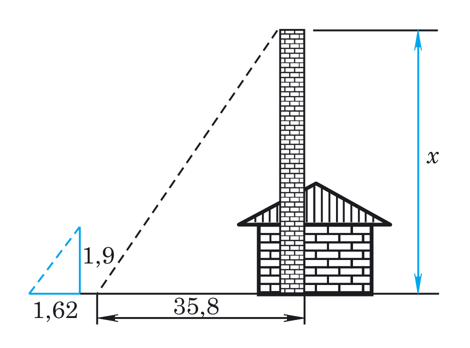


Рис. 261

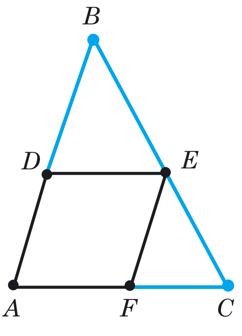


Рис. 262

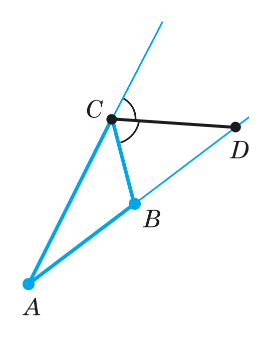


Рис. 263

42. Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.

43. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $m : n$. Как относятся проекции катетов на гипотенузу?

44. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м даёт тень длиной 1,62 м (рис. 261). Найдите высоту трубы.

45. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC (рис. 262). Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.

46. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D (рис. 263). Докажите, что $AD : BD = AC : BC$.

47. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.

48. Золотым сечением[1] называется деление отрезка длины $d = a + b$ на две части, при котором бо́льшая часть a является средней пропорциональной величиной между длиной всего отрезка d и меньшей частью b. Найдите a, если $b = 1$.

Пункт 107

49. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что: 1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на 100° больше другого; 3) разность их равна 20°.

50. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности — 10 см?

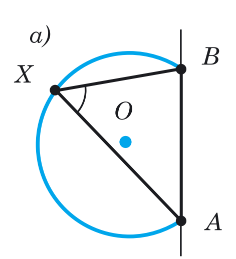
51. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

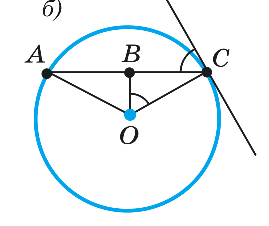
[1] Термин «золотое сечение» ввёл Леонардо да Винчи (конец XV — начало XVI в.), но само сечение было известно издавна (встречается в «Началах» Евклида).

52. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.
53. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.
54. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.
55. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? (Два случая.)
56. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ACD равен 80°. Найдите угол CAD.
57. Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.
58. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках (рис. 264, *а*).
59. Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведёнными к концам хорды (рис. 264, *б*).
60. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведённой из вершины этого угла.

Пункт 108

61. Из точки C окружности проведён перпендикуляр CD к диаметру AB. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.
62. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведённой из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$ (рис. 264, *в*).
63. Как далеко видно из самолёта, летящего на высоте 4 км над Землёй, если радиус Земли 6370 км?
64. Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкине, высота которой 537 м.





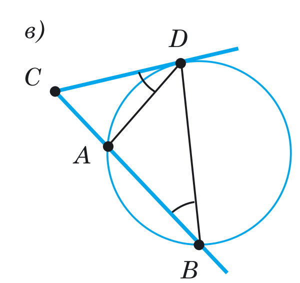


Рис. 264

Пункт 109

65. Две хорды пересекаются внутри окружности под углом 60°. Найдите градусные меры двух дуг, заключённых между сторонами этого угла и их продолжениями, если они относятся как 1:3.

66. Продолжения хорд пересекаются вне окружности под углом 60°. Найдите градусные меры двух дуг, заключённых между сторонами этого угла, если они относятся как 1:3.

67. Хорда делит окружность на части, отношение которых равно 3:7. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательной к окружности, проведённой в её конце.

68. Угол между касательными, проведёнными из одной точки к окружности, равен 50°. Найдите градусные меры дуг этой окружности, заключённых между точками касания.

69. Дан треугольник ABC. Постройте геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом, равным углу A этого треугольника.



Решение треугольников

110 Теорема косинусов

Теорема 12.1

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 265). Докажем, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

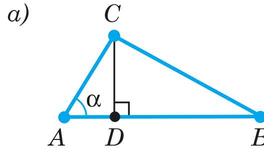
Имеем векторное равенство

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

Возведя это равенство скалярно в квадрат, получим $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, или $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Теорема доказана.

Заметим, что $AC \cdot \cos A$ равно по абсолютной величине проекции AD стороны AC на сторону AB (рис. 265, *а*) или её продолжение (рис. 265, *б*). Знак $AC \cdot \cos A$ зависит от угла A: «+», если угол A



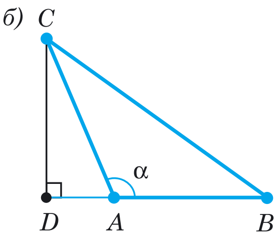


Рис. 265

острый; «−», если угол A тупой. Отсюда получается следствие:

квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «−», когда угол острый.

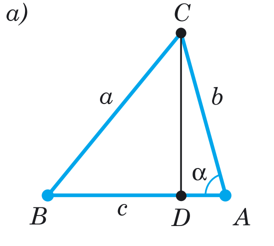


Рис. 266

Задача (7). Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Решение.

Имеем $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (рис. 266). Отсюда $AD = \pm\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$. По теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}\right)^2}.$$

111 Теорема синусов

Теорема 12.2

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство.

Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ (рис. 267). Докажем, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

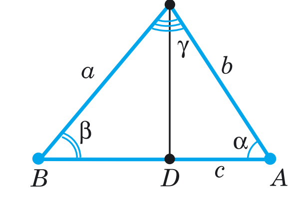
Опустим из вершины C высоту CD. Из прямоугольного треугольника ACD, если угол α острый, получаем $CD = b\sin\alpha$ (рис. 267, *а*). Если угол α тупой, то $CD = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$ (рис. 267, *б*). Аналогично из треугольника BCD получаем $CD = a\sin\beta$.

Итак, $a\sin\beta = b\sin\alpha$. Отсюда

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



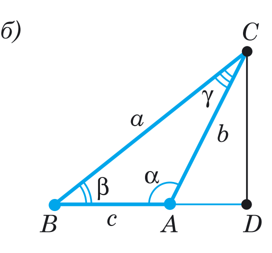


Рис. 267

Для доказательства надо провести высоту треугольника из вершины A. Теорема доказана.

Задача (13). Докажите, что в теореме синусов каждое из трёх отношений: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ — равно $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение.

Проведём диаметр BD (рис. 268). По свойству углов, вписанных в окружность, угол при вершине D прямоугольного треугольника BCD равен либо α, если точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 268, *а*), либо $180^\circ - \alpha$, если они лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 268, *б*). В первом случае

$$BC = BD \sin\alpha,$$

во втором

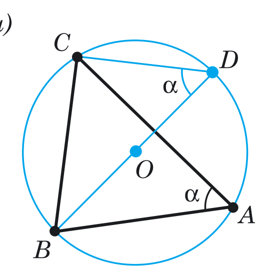
$$BC = BD \sin(180^\circ - \alpha).$$

Так как $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, то в любом случае $a = 2R \sin\alpha$. Следовательно,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R,$$

что и требовалось доказать.

а)



б)

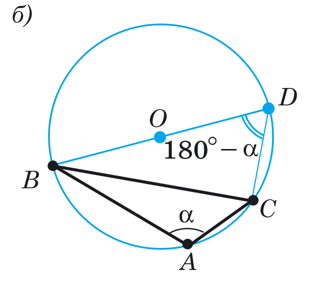


Рис. 268

112 Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами

В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

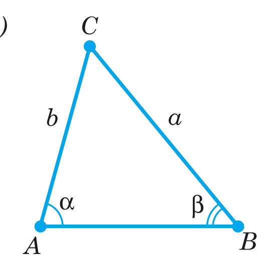
Пусть a и b — две стороны треугольника и α, β — противолежащие им углы. Докажем, что если $\alpha > \beta$, то $a > b$. И обратно: если $a > b$, то $\alpha > \beta$.

Если углы α и β острые (рис. 269, *а*), то при $\alpha > \beta$ будет $\sin\alpha > \sin\beta$. А так как

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$

то $a > b$. Если угол α тупой (оба угла не могут быть тупыми), то угол $180^\circ - \alpha$ острый (рис. 269, *б*). Причём угол $180^\circ - \alpha$ больше угла β как внешний угол треугольника, не смежный с углом β. Поэтому $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) > \sin\beta$. И мы снова заключаем, что $a > b$.

а)



б)

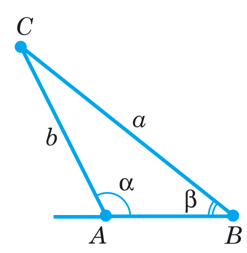


Рис. 269

Докажем обратное утверждение. Пусть $a > b$. Надо доказать, что $\alpha > \beta$. Допустим, что $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha = \beta$, то треугольник равнобедренный и $a = b$. Если $\alpha < \beta$, то по доказанному $a < b$. В обоих случаях получается противоречие, так как по предположению $a > b$, значит, $\alpha > \beta$, что и требовалось доказать.

Задача (17). Докажите, что если в треугольнике есть тупой угол, то противолежащая ему сторона наибольшая.

Решение.

В треугольнике может быть только один тупой угол. Поэтому он больше любого из остальных углов. А значит, противолежащая ему сторона больше любой из двух других сторон треугольника.

113 Решение треугольников

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов треугольника по известным его углам и сторонам. Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы через α, β, γ (рис. 270).

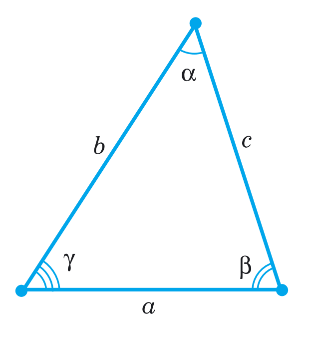


Рис. 270

Задача (26). 1) В треугольнике даны сторона $a = 5$ и два угла $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$. Найдите третий угол и остальные две стороны.

Решение.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол α выражается через заданные углы: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$.

Зная сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0{,}500}{0{,}966} \approx 2{,}59,$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

Задача (27). 1) В треугольнике даны две стороны $a = 12$, $b = 8$ и угол между ними $\gamma = 60°$. Найдите остальные два угла и третью сторону.

Решение.

Сторону находим по теореме косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma} =$$

$$= \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0{,}500} = \sqrt{122} \approx 10{,}6.$$

Теперь, имея три стороны, по теореме косинусов находим косинусы двух неизвестных углов и сами углы:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}189,$$

откуда $\alpha \approx 79°$,

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 41°.$$

Задача (28). 5) В треугольнике даны две стороны $a = 6$, $b = 8$ и противолежащий стороне a угол $\alpha = 30°$. Найдите остальные углы и сторону.

Решение.

По теореме синусов находим $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{8}{6}\cdot\sin 30° \approx 0{,}667.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\beta_1 \approx 42°$ и $\beta_2 \approx 138°$.

Рассмотрим сначала угол $\beta_1 \approx 42°$. По нему находим третий угол $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta \approx 108°$ и по теореме синусов третью сторону:

$$c_1 = \frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha} \approx 6\cdot\frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6\cdot\frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналогично по углу $\beta_2 \approx 138°$ находим $\gamma_2 \approx 12°$ и $c_2 \approx 2{,}49$.

Замечание.

Мы видим, что эта задача в отличие от предыдущих имеет два решения (рис. 271). При других численных данных, например при $\alpha \geqslant 90°$, задача может иметь лишь одно решение или вовсе не иметь решений.

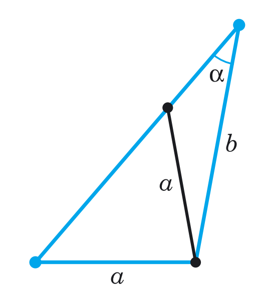


Рис. 271

Задача (29). 1) Даны три стороны треугольника: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найдите его углы.

Решение.

Углы находятся по теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875,$$

откуда $\alpha \approx 29°$.

Аналогично находится $\cos\beta = 0{,}688$, откуда $\beta \approx 47°$ и $\gamma \approx 180° - 47° - 29° = 104°$.

Контрольные вопросы

1. Докажите теорему косинусов.
2. Докажите, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой. От чего зависит знак «+» или «−»?
3. Докажите теорему синусов.
4. Докажите, что в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и против большего угла лежит бóльшая сторона.

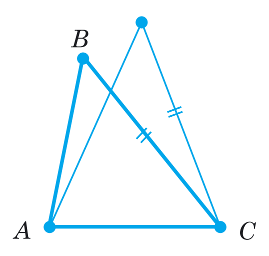


Рис. 272

Задачи

Пункт 110

1. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.
2. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.
3. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c, острый. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c, тупой.
4. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α. Найдите стороны параллелограмма.
5. Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов α. Найдите диагонали параллелограмма.
6. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.
7. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.
8. Найдите высоты треугольника в задаче 1.
9. Найдите медианы треугольника в задаче 1.
10. Найдите биссектрисы треугольника в задаче 1.
11. Как изменяется сторона AB треугольника ABC, если угол C возрастает, а длины сторон AC и BC не меняются (рис. 272)?

Пункт 111

12. У треугольника ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли $\sin\beta = 0{,}75$?
13. Докажите, что в теореме синусов каждое из трёх отношений $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ равно $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.
14. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.

15. Объясните, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 273), зная расстояние AC и углы α и β.

16. Объясните, как найти высоту x маяка (рис. 274) по углам α и β и расстоянию a.

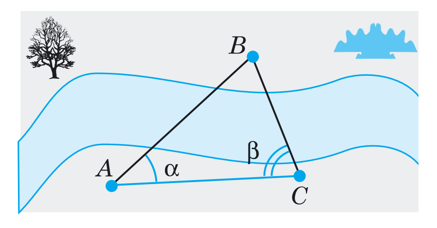


Рис. 273

Пункт 112

17. Докажите, что если в треугольнике есть тупой угол, то противолежащая ему сторона наибольшая.

18. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Какая из сторон треугольника наибольшая, какая наименьшая?

19. У треугольника ABC стороны $AB = 5{,}1$ м, $BC = 6{,}2$ м, $AC = 7{,}3$ м. Какой из углов треугольника наибольший, какой наименьший?

20. Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60°?

21. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, то $BX < AB$.

22. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, а точка Y — на стороне BC, то $XY < AB$.

23. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок CD меньше по крайней мере одной из сторон: AC или BC.

24. Дан треугольник ABC. CD — медиана, проведённая к стороне AB. Докажите, что если $AC > BC$, то угол ACD меньше угла BCD.

25. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведённых из этой же вершины.

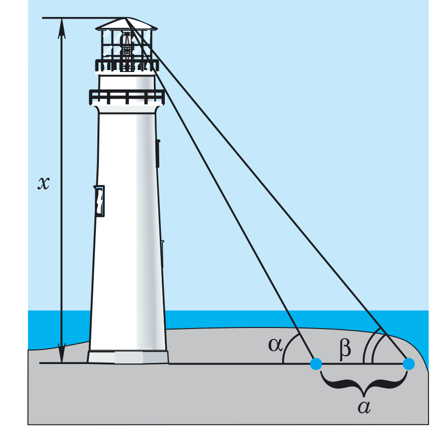


Рис. 274

Пункт 113

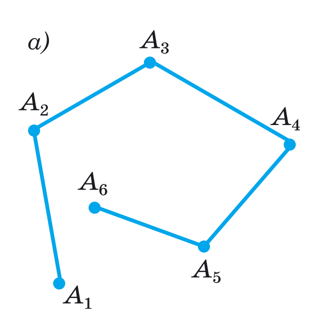
26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
2) $a = 20$, $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$;
3) $a = 35$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$;
4) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$;
5) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

27. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:
1) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$;
2) $a = 7$, $b = 23$, $\gamma = 130°$;
3) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 95°$;
4) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$;
5) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$;
6) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

28. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы и третью сторону треугольника, если:
1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:
1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;
5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.



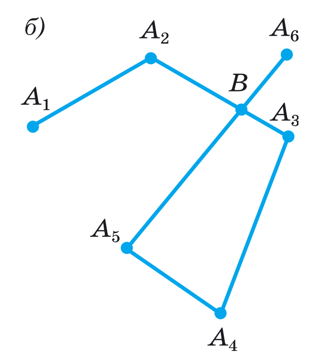


Рис. 275

§ 13 Многоугольники

114 Ломаная

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, ..., A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **вершинами** ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ — **звеньями** ломаной. Ломаная называется **простой**, если она не имеет самопересечений.

На рисунке 275, *а* показана простая ломаная, а на рисунке 275, *б* — ломаная с самопересечением (в точке B). **Длиной ломаной** называется сумма длин её звеньев.



Теорема **13.1**

Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы.

Доказательство.

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — данная ломаная (рис. 276).

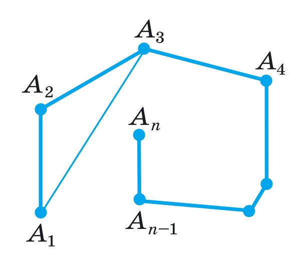


Рис. 276

Заменим звенья A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3. Получим ломаную $A_1A_3A_4...A_n$. Так как по неравенству треугольника

$$A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3,$$

то ломаная $A_1A_3A_4...A_n$ имеет длину, не большую чем исходная ломаная.

Заменяя таким же образом звенья A_1A_3 и A_3A_4 звеном A_1A_4, переходим к ломаной $A_1A_4A_5...A_n$, которая также имеет длину, не большую чем исходная ломаная. И т. д. В итоге мы придём к отрезку A_1A_n, соединяющему концы ломаной. Отсюда следует, что исходная ломаная имела длину, не меньшую длины отрезка A_1A_n. Теорема доказана.



Задача (1). Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?

Решение.

Для ломаной O_1XYO_2 по теореме 13.1 $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (рис. 277). Значит, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Отсюда $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. Так как $AC = d - R_1 - R_2$, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно $d - R_1 - R_2$.

Для ломаной XO_1O_2Y по той же теореме $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. Так как $BD = d + R_1 + R_2$, то наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + R_1 + R_2$.

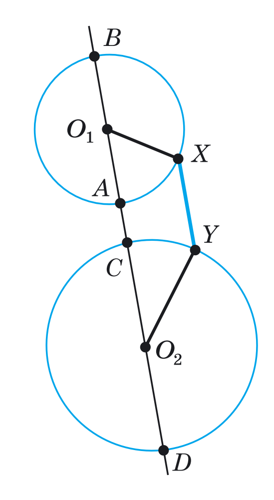


Рис. 277

115 Выпуклые многоугольники

Ломаная называется **замкнутой**, если у неё концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**, если её соседние звенья не лежат на одной прямой (рис. 278). Вершины

ломаной называются **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника**. Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются **диагоналями**. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется **n-угольником**.

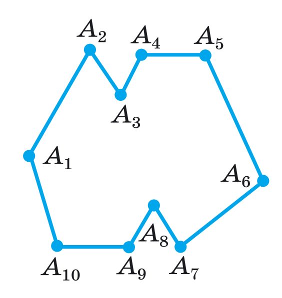


Рис. 278

Плоским многоугольником или **многоугольной областью** называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником (рис. 279).

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунке 280, *а* изображён выпуклый многоугольник, а на рисунке 280, *б* — невыпуклый. **Углом выпуклого многоугольника** при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

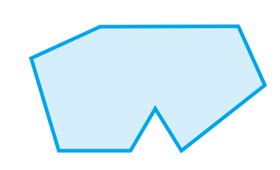


Рис. 279

Сумма длин всех сторон выпуклого многоугольника называется **периметром**.

Теорема 13.2

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.

Доказательство.

В случае $n = 3$ теорема справедлива. Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный выпуклый многоугольник и $n > 3$ (рис. 281). Проведём $n - 3$ диагонали: A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}. Так как многоугольник выпуклый, то эти диагонали разбивают его на $n-2$ треугольника: $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, ..., $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. Сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ совпадает с суммой углов всех этих треугольников. Сумма углов каждого треугольника равна $180°$, а число этих треугольников есть $n - 2$. Поэтому сумма углов выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ равна $180° \cdot (n - 2)$. Теорема доказана.

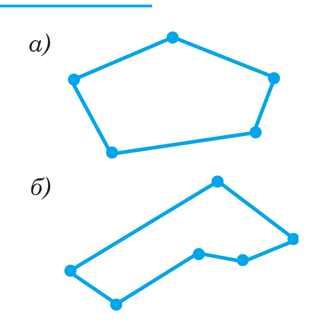


Рис. 280

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.

Задача (9). Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

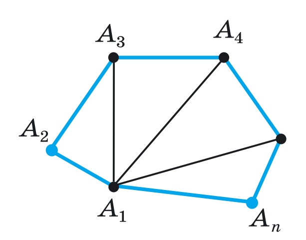


Рис. 281

Решение.

Сумма внутреннего угла многоугольника и смежного с ним внешнего равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и внешних углов равна $180° \cdot n$. Но сумма всех внутренних углов равна $180° \cdot (n - 2)$. Значит, сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна

$$180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°.$$



116 Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

Теорема 13.3

Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.

Доказательство.

Пусть A и B — две соседние вершины правильного многоугольника (рис. 282). Проведём биссектрисы углов многоугольника из вершин A и B. Пусть O — точка их пересечения.

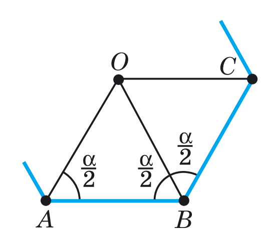


Рис. 282

Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB и углами при основании, равными $\frac{\alpha}{2}$, где α — угол многоугольника.

Соединим точку O с вершиной C, соседней с B. Треугольники ABO и CBO равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона OB общая, стороны AB и BC равны как стороны многоугольника, а углы при вершине B равны $\frac{\alpha}{2}$. Из равенства треугольников следует, что треугольник OBC равнобедренный с углом при вершине C, равным $\frac{\alpha}{2}$, т. е. CO есть биссектриса угла C.

Теперь соединяем точку O с вершиной D, соседней с C, и доказываем, что треугольник COD

равнобедренный и DO — биссектриса угла D многоугольника. И т. д.

В итоге получается, что каждый треугольник, у которого одна сторона есть сторона многоугольника, а противолежащая вершина — точка O, является равнобедренным.

Все эти треугольники имеют равные боковые стороны и равные высоты, опущенные на их основания. Отсюда следует, что все вершины многоугольника находятся на окружности с центром O и радиусом, равным боковым сторонам треугольников, а все стороны многоугольника касаются окружности с центром O и радиусом, равным высотам треугольников, опущенным из вершины O. Теорема доказана.

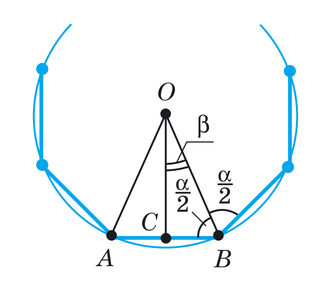


Рис. 283

Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют один и тот же центр. Его называют **центром многоугольника**. Угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется **центральным углом** многоугольника.

117 Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников

Найдём радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n (рис. 283).



Имеем

$$\beta = \frac{180^\circ}{n},$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},$$

$$r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Для правильного (равностороннего) треугольника $n = 3$, $\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}},\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного четырёхугольника (квадрата) $n = 4$, $\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$.

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

Для правильного шестиугольника $n = 6$, $\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$.

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a, \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача (16). Найдите выражения для стороны a_n правильного n-угольника через радиус R описанной около него окружности и радиус r вписанной окружности. Вычислите a_n при $n = 3, 4, 6$.



Так как $R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, то отсюда следует: $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. В частности,

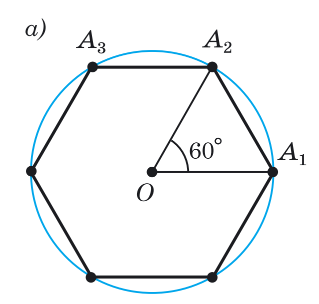
$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R.$$

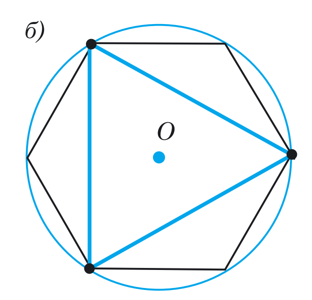
Так как $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$, то отсюда следует: $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. В частности,

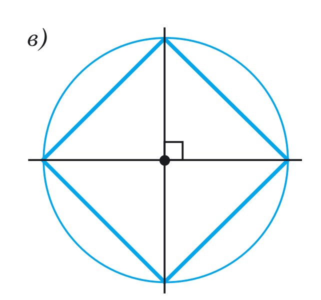
$$a_3 = 2r\sqrt{3}, \quad a_4 = 2r, \quad a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

118 Построение некоторых правильных многоугольников

Для построения правильного многоугольника, вписанного в окружность, достаточно построить его центральный угол. У правильного шестиугольника такой угол равен $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Поэтому для построения правильного шестиугольника одну вершину (A_1) на окружности берём произвольно. Из неё как из центра радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечку и получаем вершину A_2 (рис. 284, *а*). Затем аналогично строим остальные вершины A_3, A_4, A_5, A_6 и соединяем их отрезками.







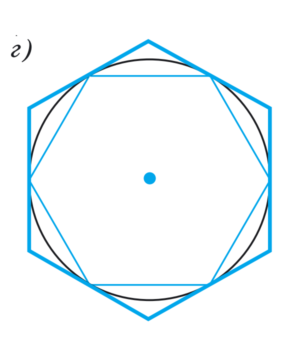


Рис. 284



Для построения правильного вписанного треугольника достаточно соединить через одну вершины правильного вписанного шестиугольника (рис. 284, *б*).

Для построения правильного вписанного четырёхугольника (квадрата) достаточно провести через центр окружности перпендикулярные прямые. Они пересекут окружность в вершинах квадрата (рис. 284, *в*).

Для построения правильного описанного многоугольника достаточно провести касательные к окружности в вершинах правильного вписанного многоугольника. Касательные, проходящие через вершины правильного вписанного многоугольника, пересекаются в вершинах правильного описанного многоугольника (рис. 284, *г*).

Если в окружность вписан правильный n-угольник, то легко построить правильный вписанный $2n$-угольник. На рисунке 285 показано построение правильного восьмиугольника.

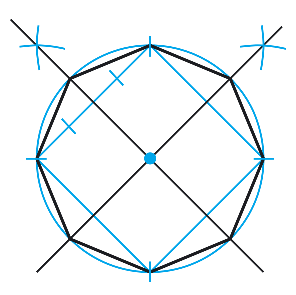


Рис. 285

119 Вписанные и описанные четырёхугольники

В определении угла выпуклого многоугольника (п. 115) речь идёт о выпуклых многоугольниках, поэтому далее будем рассматривать лишь выпуклые четырёхугольники. По определению градусная мера каждого угла выпуклого четырёхугольника меньше 180°. А из теоремы 13.2 следует, что *сумма углов выпуклого четырёхугольника равна* 360°.

Следующая теорема выражает свойство и признак вписанного четырёхугольника.

Теорема 13.4

У четырёхугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°. И наоборот, если у четырёхугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Доказательство.

Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и A и C — его противолежащие углы (рис. 286). Вершины A и C четырёхугольника $ABCD$ лежат по разные стороны от пря-

мой BD, и, значит, он выпуклый. Угол BCD по свойству вписанных углов равен половине соответствующего центрального угла, дуга которого содержит вершину A, а угол BAD равен половине соответствующего дополнительного центрального угла, дуга которого содержит вершину C. Отсюда следует, что $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Сумма углов B и D данного четырёхугольника тоже равна 180°, так как сумма всех углов четырёхугольника равна 360°. Свойство вписанного четырёхугольника доказано.

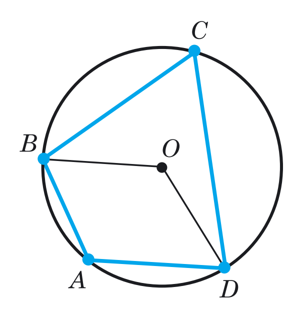


Рис. 286

Докажем признак вписанного четырёхугольника. Пусть у данного выпуклого четырёхугольника $ABCD$ сумма противолежащих углов A и C равна 180°. Опишем вокруг треугольника ABD окружность (см. рис. 286). Вершины A и C четырёхугольника $ABCD$ лежат по разные стороны от прямой BD, потому что по условию теоремы он выпуклый. По доказанному градусная мера любого вписанного угла, стороны которого проходят через точки B и D, а вершины лежат на дуге построенной окружности, не содержащей вершины A, равна $180^\circ - \angle A$ и, значит, равна градусной мере угла C данного четырёхугольника. Отсюда следует, что точка C как вершина угла, стороны которого проходят через данные точки B и D, принадлежит геометрическому месту вершин таких углов с той же градусной мерой и поэтому лежит на окружности, описанной около треугольника ABD. Теорема доказана.

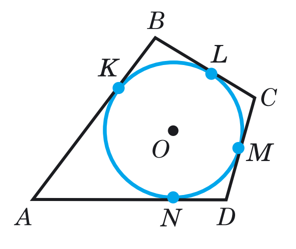


Рис. 287

Следующая теорема выражает свойство и признак описанного четырёхугольника.

Теорема 13.5

В описанном четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны. И наоборот, **если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.**

Доказательство.

Пусть стороны описанного четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности в точках K, L, M, N (рис. 287). По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Поэтому

$$(AK + KB) + (CM + MD) = (AN + ND) + (BL + LC),$$

т. е. $AB + CD = AD + BC$. Свойство доказано.

Докажем признак описанного четырёхугольника. Если четырёхугольник $ABCD$ ромб, то он является описанным около окружности с центром в точке пересечения его диагоналей.

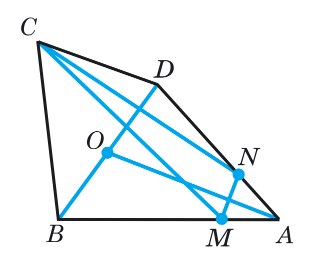


Рис. 288

Рассмотрим теперь случай, когда у выпуклого четырёхугольника $ABCD$ есть неравные соседние стороны. Допустим, что $AB > BC$, и, значит, $AD > DC$. Отложим на сторонах с общей вершиной A отрезки $BM = BC$, $DN = DC$ (рис. 288). Тогда $AM = AN$, и поэтому треугольник AMN — равнобедренный с основанием MN. Треугольники CBM и CDN по построению также равнобедренные с основаниями CM и CN.

По свойству медианы равнобедренного треугольника медианы этих трёх треугольников, проведённые к их основаниям, являются их высотами.

Значит, прямые, содержащие эти медианы, — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника CMN и поэтому пересекаются в одной точке O.



Эти же медианы являются и биссектрисами равнобедренных треугольников AMN, CBM и CDN. Поэтому лучи AO, BO и DO — биссектрисы углов A, B и D четырёхугольника $ABCD$, которые образуют с его сторонами острые углы, так как по условию данный четырёхугольник выпуклый. Значит, точка O равноудалена от всех сторон четырёхугольника $ABCD$, и поэтому он является описанным около окружности с центром в этой точке. Теорема доказана.

120 Подобие правильных выпуклых многоугольников

Теорема 13.6

Правильные выпуклые n-угольники подобны. В частности, если у них стороны равны, то они равны.

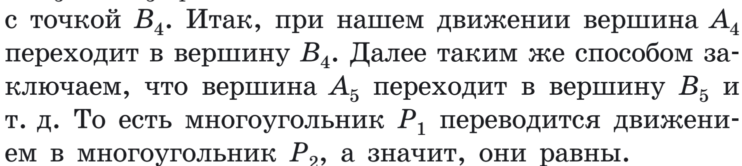
Доказательство.

Докажем сначала второе утверждение теоремы. Итак, пусть P_1: $A_1A_2...A_n$, P_2: $B_1B_2...B_n$ — правильные выпуклые n-угольники с одинаковыми сторонами (рис. 289). Докажем, что они равны, т. е. совмещаются движением.



Треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ равны по первому признаку. У них $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$.

Подвергнем многоугольник P_1 движению, при котором его вершины A_1, A_2, A_3 переходят в вершины B_1, B_2, B_3 соответственно. Как мы знаем, такое движение существует. При этом вершина A_4 перейдёт в некоторую точку C. Точки B_4 и C лежат по одну сторону с точкой B_1 относительно прямой B_2B_3. Так как движение сохраняет углы и расстояния, то $\angle B_2B_3C = \angle B_2B_3B_4$ и $B_3C = B_3B_4$. А значит, точка C совпадает



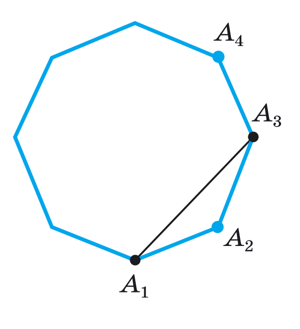
с точкой B_4. Итак, при нашем движении вершина A_4 переходит в вершину B_4. Далее таким же способом заключаем, что вершина A_5 переходит в вершину B_5 и т. д. То есть многоугольник P_1 переводится движением в многоугольник P_2, а значит, они равны.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, подвергнем сначала многоугольник P_1 преобразованию подобия, например гомотетии, с коэффициентом $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. При этом получим правильный n-угольник P' с такими же сторонами, как и у многоугольника P_2.

По доказанному многоугольник P' переводится движением в многоугольник P_2, а значит, многоугольник P_1 переводится в многоугольник P_2 преобразованием подобия и движением. А это есть снова преобразование подобия. Теорема доказана.

У подобных фигур коэффициент подобия равен отношению соответствующих линейных размеров. У правильных n-угольников такими линейными размерами являются длины сторон, радиусы вписанных и описанных окружностей. Отсюда следует, что у правильных n-угольников отношения сторон, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны. А так как периметры n-угольников тоже относятся как стороны, то

у правильных n-угольников отношения периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны.



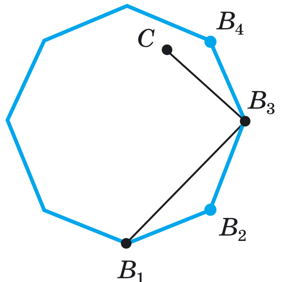


Рис. 289

121 Длина окружности

Наглядное представление о длине окружности получается следующим образом. Вообразим себе нить в форме окружности. Разрежем её и растянем за концы. Длина полученного отрезка и есть длина окружности. Как найти длину окружности, зная её радиус? Ясно, что при неограниченном увеличении числа сторон вписанного в окружность правильного многоугольника его периметр неограниченно приближается к длине окружности (рис. 290). Исходя из этого, докажем некоторые свойства длины окружности.

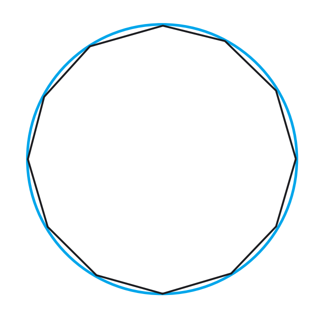


Рис. 290

Теорема 13.7

Отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых окружностей.

Доказательство.

Возьмём две произвольные окружности. Пусть R_1 и R_2 — их радиусы, а l_1 и l_2 — их длины.

Допустим, что утверждение теоремы неверно и $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, например:

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \quad (*)$$



Впишем в наши окружности правильные выпуклые многоугольники с большим числом сторон n. Если n очень велико, то длины наших окружностей будут очень мало отличаться от периметров p_1 и p_2 вписанных многоугольников. Поэтому неравенство $(*)$ не нарушится, если в нём заменить l_1 на p_1, а l_2 на p_2:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \quad (**)$$

Но, как мы знаем, периметры правильных выпуклых n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Отсюда $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$. А это противоречит неравенству $(**)$. Теорема доказана.

Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»): $\frac{l}{2R} = \pi$. Число π иррациональное. Приближённое значение $\pi \approx 3{,}1416$.

Приближённое значение числа π было известно уже древним грекам. Очень простое приближённое значение π нашёл Архимед: $\frac{22}{7}$. Оно отличается от точного значения меньше чем на 0,002.



Архимед — древнегреческий учёный (III в. до н. э.)

Так как $\frac{l}{2R} = \pi$ то длина окружности вычисляется по формуле $l = 2\pi R$.

122 Радианная мера угла

Найдём длину дуги окружности, отвечающей центральному углу в n° (рис. 291). Развёрнутому углу соответствует длина полуокружности πR. Следовательно, углу в 1° соответствует дуга длины $\frac{\pi R}{180^\circ}$, а углу в n° соответствует дуга длины

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

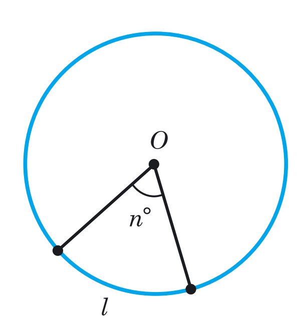


Рис. 291

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы для длины дуги окружности следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n,$$

т. е. **радианная мера угла получается из градусной умножением на $\frac{\pi}{180^\circ}$.** В частности, радианная мера угла 180° равна π, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$. Единицей радианной меры углов является **радиан**. Угол в один радиан — это угол, у которого длина дуги равна радиусу (рис. 292). Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

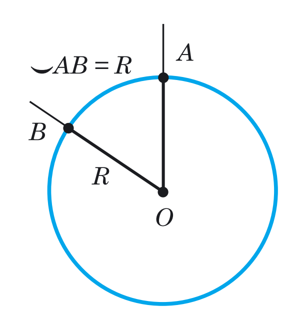


Рис. 292

Задача (50). Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Решение.

Радианная мера угла A равна $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$.

Радианная мера угла B равна $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. По теореме о сумме углов треугольника

$$\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое ломаная? длина ломаной?
2. Докажите, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы.
3. Что такое многоугольник? выпуклый многоугольник?
4. Что такое плоский многоугольник?
5. Что такое угол выпуклого многоугольника при данной вершине?
6. Выведите формулу суммы углов выпуклого многоугольника.
7. Что такое внешний угол выпуклого многоугольника?
8. Докажите, что правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.
9. Что называется центром многоугольника? центральным углом многоугольника?
10. Выведите формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника.
11. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для правильного треугольника, четырёхугольника (квадрата), шестиугольника.
12. Как построить правильный выпуклый шестиугольник? треугольник? четырёхугольник? восьмиугольник?
13. Сформулируйте и докажите свойство и признак вписанного четырёхугольника.
14. Сформулируйте и докажите свойство и признак описанного четырёхугольника.
15. Докажите, что правильные выпуклые n-угольники подобны. В частности, если у них стороны одинаковы, то они равны.
16. Докажите, что отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности.
17. По какой формуле вычисляется длина окружности?
18. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
19. Что такое радианная мера угла?
20. Чему равны радианные меры углов 180° и 90°?
21. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 179—189)? Приведите другие примеры геометрических фигур.

Задачи

Пункт 114

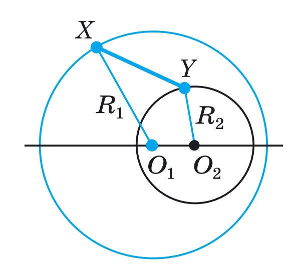


Рис. 293

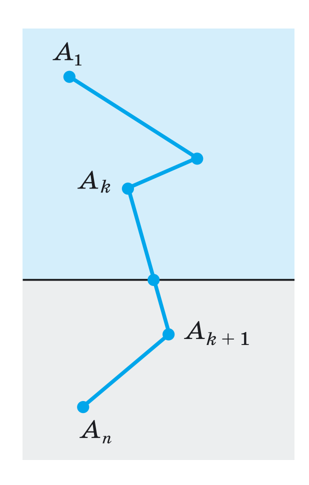


Рис. 294

1. Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?
2. Решите задачу 1 при условии, что $d < R_1 - R_2$ (рис. 293).
3. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего её концы.
4. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.
5. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.
6. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.
7. Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую (рис. 294).

Пункт 115

8. Сколько диагоналей у n-угольника?
9. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?
10. Углы выпуклого четырёхугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.
11. Докажите, что у четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противолежащих сторон равны.

Пункт 116

12. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1) $135°$; 2) $150°$?
13. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1) $36°$; 2) $24°$?
14. Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.
15. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.

Пункты 117—118

16. Найдите выражения для стороны a_n правильного n-угольника через радиус R описанной около него окружности и радиус r вписанной окружности. Вычислите a_n при $n = 3, 4, 6$.

17. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.

18. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в 2 раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.

19. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

20. В окружность радиусом 4 дм вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

21. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Каким может быть наибольший размер стороны квадрата?

22. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трёхгранную форму. Каким может быть наибольший размер грани, если диаметр цилиндрической части винта 2 см?

23. Докажите, что сторона правильного восьмиугольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.

24. Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.

25. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса R.

26. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус описанной окружности R. Найдите радиус вписанной окружности.

27. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус вписанной окружности r. Найдите радиус описанной окружности.

28. Выразите сторону b правильного описанного многоугольника через радиус R окружности и сторону a правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.

29. Выразите сторону a правильного вписанного многоугольника через радиус R окружности и сторону b правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.

30. Впишите в окружность правильный 12-угольник.

31. Опишите около окружности правильный треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

Пункт 119

32. Докажите, что около равнобокой трапеции можно описать окружность. Верно ли обратное утверждение?
33. Равнобокая трапеция описана около окружности с радиусом 12 дм. Точка касания делит её боковую сторону в отношении 9:4. Найдите среднюю линию трапеции.
34. Около окружности радиуса r описана равнобокая трапеция с основаниями $2a$ и $2b$. Докажите, что $r^2 = ab$.
35. Найдите расстояние между сторонами ромба, диагонали которого равны d_1 и d_2.

Пункт 120

36. Радиусы вписанной и описанной окружностей одного правильного n-угольника равны r_1 и R_1, а радиус вписанной окружности другого правильного n-угольника равен r_2. Чему равен радиус описанной окружности другого n-угольника?
37. Периметры двух правильных n-угольников относятся как $a : b$. Как относятся радиусы их вписанных и описанных окружностей?

Пункт 121

38. Вычислите длину окружности, если её радиус равен:
1) 10 м; 2) 15 м.
39. На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?
40. Найдите отношение периметра правильного вписанного восьмиугольника к диаметру окружности и сравните его с приближённым значением π.
41. Решите задачу 40 для правильного 12-угольника.
42. Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 м составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.
43. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?
44. Внутри окружности радиуса R расположены n равных окружностей, которые касаются друг друга и данной окружности.

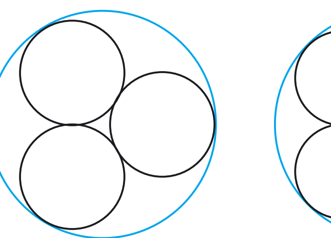
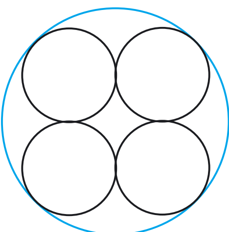
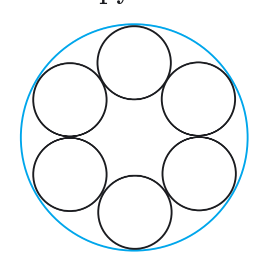




Рис. 295

Найдите радиусы этих окружностей, если число их равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6 (рис. 295).

45. Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.

46. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

Пункт 122

47. Найдите длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу: 1) 30°; 2) 45°; 3) 120°; 4) 270°.

48. Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга составляет: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ окружности?

49. Какой угол образуют радиусы Земли, проведённые в две точки на её поверхности, расстояние между которыми равно 1 км? Радиус Земли 6370 км.

50. По радиусу $R = 1$ м найдите длину дуги, отвечающей центральному углу: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 150°36′.

51. По данной хорде a найдите длину её дуги, если градусная мера дуги равна: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

52. По данной длине дуги l найдите её хорду, если дуга содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

53. Найдите радианную меру углов: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

54. Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$.

55. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{8}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$.



§ 14 Площади фигур

123 Понятие площади

Геометрическую фигуру будем называть **простой**, если её можно разбить на конечное число плоских треугольников. Напомним, что плоским треугольником мы называем конечную часть плоскости, ограниченную треугольником (рис. 296).

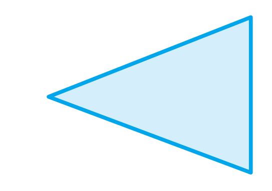


Рис. 296

Примером простой фигуры является выпуклый плоский многоугольник. Он разбивается на плоские треугольники диагоналями, проведёнными из какой-нибудь его вершины (рис. 297). В этом па-

раграфе мы рассматриваем только плоские многоугольники и поэтому повторять каждый раз слово «плоский» не будем. Дадим определение площади для простых фигур.

Для простых фигур **площадь — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:**

1) **Равные фигуры имеют равные площади.**
2) **Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей её частей.**
3) **Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.**

Если квадрат, о котором идёт речь в определении, имеет сторону 1 м, то площадь будет в квадратных метрах (м^2). Если сторона квадрата 100 м, то площадь будет в гектарах. Если сторона квадрата 1 км, то площадь будет в квадратных километрах и т. п.

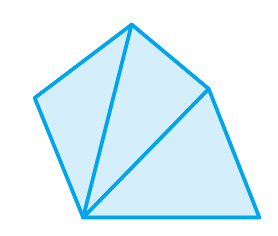


Рис. 297

124 Площадь прямоугольника

Найдём площадь прямоугольника со сторонами a, b. Для этого сначала докажем, что площади двух прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты.

Пусть $ABCD$ и AB_1C_1D — два прямоугольника с общим основанием AD (рис. 298, *а*). Пусть S и S_1 — их площади. Докажем, что $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$.

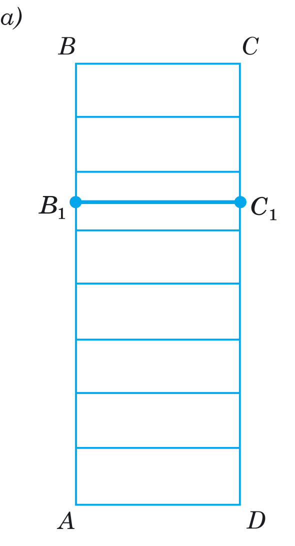
Разобьём сторону AB прямоугольника на большое число n равных частей, каждая из них равна $\frac{AB}{n}$. Пусть m — число точек деления, которые лежат на стороне AB_1. Тогда

$$\left(\frac{AB}{n}\right)m < AB_1 < \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда, разделив на AB, получим

$$\frac{m}{n} < \frac{AB_1}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведём через точки деления прямые, параллельные основанию AD. Они разобьют прямоугольник $ABCD$ на n равных прямоугольников. Каж-



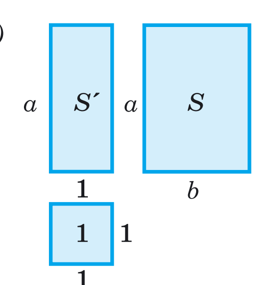


Рис. 298

дый из них имеет площадь $\frac{S}{n}$. Прямоугольник AB_1C_1D содержит первые m прямоугольников, считая снизу, и содержится в $m + 1$ прямоугольниках. Поэтому $\left(\frac{S}{n}\right)m < S_1 < \left(\frac{S}{n}\right)(m+1)$. Отсюда

$$\frac{m}{n} < \frac{S_1}{S} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$



Из неравенств (*) и (**) мы видим, что оба числа $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_1}{S}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим, то это может быть только при $\frac{AB_1}{AB} = \frac{S_1}{S}$, что и требовалось доказать.

Возьмём теперь квадрат, являющийся единицей площади, прямоугольник со сторонами 1, a и прямоугольник со сторонами a, b (рис. 298, *б*). Сравнивая их площади, по доказанному будем иметь

$$\frac{S'}{1} = \frac{a}{1} \text{ и } \frac{S}{S'} = \frac{b}{1}.$$

Перемножая эти равенства почленно, получим $S = ab$. Итак,

площадь прямоугольника со сторонами a, b вычисляется по формуле $S = ab$.



125 Площадь параллелограмма

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Если он не является прямоугольником, то один из его углов — A или B — острый. Пусть для определённости угол A острый, как изображено на рисунке 299.

Опустим перпендикуляр AE из вершины A на прямую CD. Площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADE.

Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую CD. Тогда площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BCF.

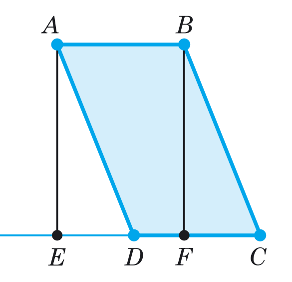


Рис. 299

Прямоугольные треугольники ADE и BCF равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABFE$, т. е. равна $AB \cdot BF$. Отрезок BF называется **высотой** параллелограмма, соответствующей сторонам AB и CD.

Итак,

площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

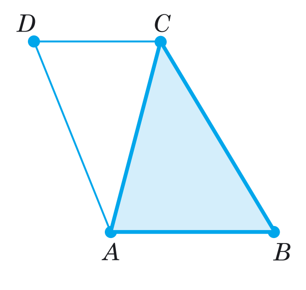


Рис. 300

126 Площадь треугольника

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 300). Дополним этот треугольник до параллелограмма $ABCD$, как указано на рисунке. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведённой к стороне AB. Значит,

площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведённую к ней высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Докажем теперь, что

площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.

Пусть ABC — данный треугольник (рис. 301). Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Проведём в треугольнике ABC высоту BD. Имеем

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Из прямоугольного треугольника ABD

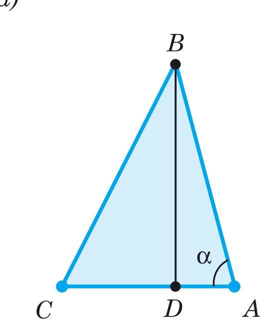
$$BD = AB \cdot \sin \alpha,$$

если угол α острый (рис. 301, *а*),

$$BD = AB \cdot \sin(180° - \alpha),$$

если угол α тупой (рис. 301, *б*).

а)



б)

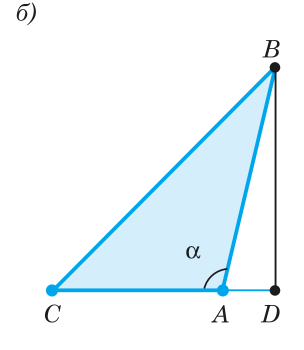


Рис. 301

Так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то в любом случае $BD = AB \cdot \sin\alpha$. Значит, площадь треугольника $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$, что и требовалось доказать.

Выведем формулу Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

Имеем $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, где γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Отсюда $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Значит,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$
$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Замечая, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, получаем

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

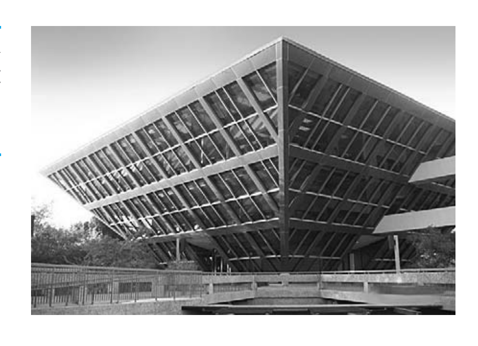
Таким образом, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Значение выведенных формул площади треугольника важно не только для вычислений площадей различных треугольников, но и для вычислений площадей многоугольников, которые предварительно надо разбить диагоналями на треугольники.

127 Равновеликие фигуры

Две фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади. Так как площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне, то отсюда следует, что

если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника и равны их высоты, проведённые к этим сторонам, то треугольники равновелики.



Заметим, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $ABFE$ (см. рис. 299) равновелики, что было использовано при доказательстве формулы площади параллелограмма. Их равновеликость следует из того, что оба они дополняют равные треугольники ADE и BCF до трапеции $ABCE$.

Две фигуры называются **равносоставленными**, если их можно разбить на конечное число попарно равных фигур. Например, параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $ABFE$, изображённые на рисунке 299, равносоставленные, потому что они составлены из равных фигур — общего для них обоих четырёхугольника $ABFD$ и прямоугольных треугольников BCF (входит в параллелограмм) и ADE (входит в прямоугольник).

Любые две равносоставленные фигуры являются, очевидно, равновеликими. Обратное утверждение не столь очевидно. Однако можно доказать, что любые два многоугольника, имеющие равные площади, равносоставлены.

128 Площадь трапеции

Пусть $ABCD$ (рис. 302) — данная трапеция. Диагональ AC разбивает её на два треугольника: ABC и CDA. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot CE$, площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}DC \cdot AF$. Высоты CE и AF этих треугольников равны расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. Это расстояние называется **высотой** трапеции. Следовательно,

площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

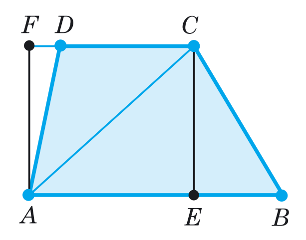


Рис. 302

Задача (40). Докажите, что если диагонали четырёхугольника пересекаются, то площадь

четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Решение.

Площадь S четырёхугольника равна сумме площадей треугольников ABC и ADC (рис. 303):

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot DO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot \sin\alpha(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

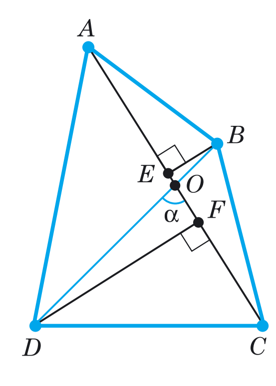


Рис. 303

129 Формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника

Задача (42). Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Решение.

Начнём с формулы для R. Как мы знаем, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где α — угол, противолежащий стороне a треугольника.

Умножая числитель и знаменатель правой части на bc и замечая, что $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$, получим

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Выведем формулу для r (рис. 304). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников OAB, OBC и OCA:

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br.$$

Отсюда $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

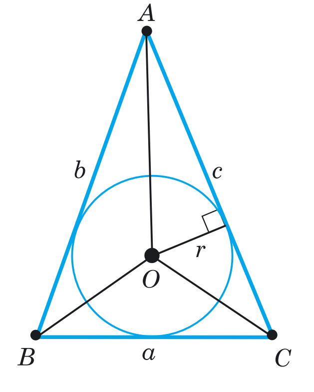


Рис. 304

130 Площади подобных фигур

Пусть F' и F'' — две подобные простые фигуры. Выясним, как относятся площади этих фигур. Так как фигуры подобны, то существует преобразование подобия, при котором фигура F' переходит в фигуру F''.

Разобьём фигуру F' на треугольники $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, ... (рис. 305). Преобразование подобия, переводящее фигуру F' в фигуру F'', переводит эти треугольники в треугольники $\triangle''_1$, $\triangle''_2$, $\triangle''_3$, ... разбиения фигуры F''. Площадь фигуры F' равна сумме площадей треугольников $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, ..., а площадь фигуры F'' равна сумме площадей треугольников $\triangle''_1$, $\triangle''_2$, ...

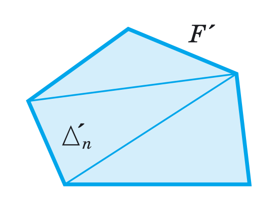
Если коэффициент подобия равен k, то размеры треугольника $\triangle''_n$ в k раз больше соответствующих размеров треугольника $\triangle'_n$. В частности, стороны и высоты треугольника $\triangle''_n$ в k раз больше соответствующих сторон и высот треугольника $\triangle'_n$. Отсюда следует, что

$$S(\triangle''_n) = k^2 S(\triangle'_n).$$

Складывая соответствующие равенства почленно, получим

$$S(F'') = k^2 S(F').$$

Коэффициент подобия k равен отношению соответствующих линейных размеров фигур F'' и F'. Поэтому **площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.**



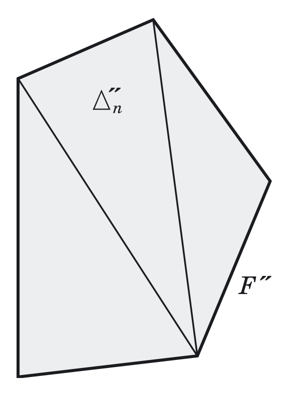


Рис. 305



131 Площадь круга

Если фигура простая, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольников, то её площадь равна сумме площадей этих треугольников. Для произвольной фигуры площадь определяется следующим образом.

Данная фигура имеет площадь S, если существуют содержащие её простые фигуры и содержащиеся в ней простые фигуры с площадями, как угодно мало отличающимися от S. Применим это определение к нахождению площади круга.



Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Эта точка называется **центром круга**, а данное расстояние — **радиусом круга**. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом (рис. 306).

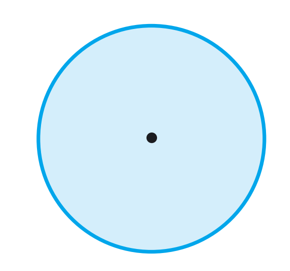


Рис. 306

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус.

Докажем это. Построим два правильных n-угольника: P_1 — вписанный в круг и P_2 — описанный около круга (рис. 307). Многоугольники P_1 и P_2 являются простыми фигурами. Многоугольник P_2 содержит круг, а многоугольник P_1 содержится в круге. Радиусы, проведённые в вершины многоугольника P_1, разбивают его на n треугольников, равных треугольнику AOD. Поэтому $S_{P_1} = nS_{AOD}$. Так как

$$S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cdot \cos\alpha, \text{ то}$$

$$S_{P_1} = (nAC)AO\cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

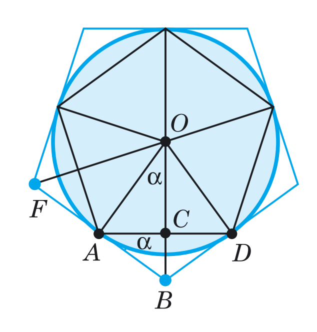


Рис. 307

где p — периметр многоугольника P_1, R — радиус круга. Аналогично находим площадь многоугольника P_2:

$$S_{P_2} = nS_{BOF},$$

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S_{P_2} = \frac{(nAC)AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$



Итак, многоугольник P_1, содержащийся в круге, имеет площадь $S_{P_1} = \frac{pR}{2}\cos\alpha$, а многоугольник P_2, содержащий круг, имеет площадь $S_{P_2} = \frac{pR}{2\cos\alpha}$.

Так как при достаточно большом n периметр p отличается сколь угодно мало от длины l окружности, а $\cos\alpha$ сколь угодно мало отличается от единицы, то площади многоугольников P_1 и P_2 сколь угодно мало отличаются от $\frac{lR}{2}$. Согласно определению это значит, что площадь круга

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2,$$

что и требовалось доказать.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 308).



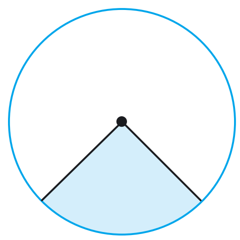


Рис. 308

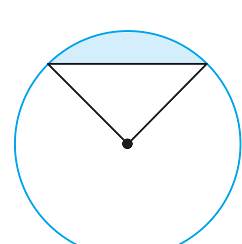
Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha,$$

где R — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 309).







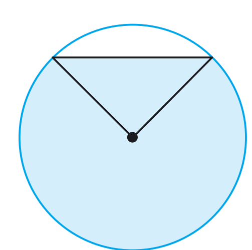


Рис. 309

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\triangle},$$

где α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_{\triangle}$ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «−» надо брать, когда $\alpha < 180°$, а знак «+» надо брать, когда $\alpha > 180°$.

Одной из проблем Античности была так называемая **квадратура круга**: задача о построении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Как выяснилось в конце XIX в., эта задача неразрешима, поскольку число π является трансцендентным[1] и поэтому построить с помощью циркуля и линейки отрезок длины π (равный длине окружности единичного диаметра) невозможно.

[1] Трансцендентное число — число не удовлетворяющее никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.



Другими примерами классических задач, неразрешимых с помощью циркуля и линейки, является задача о **трисекции угла**: разделить данный угол на три равные части; и задача об **удвоении куба**: построить ребро куба, объём которого в 2 раза больше объёма данного куба. Но природа их неразрешимости в другом. Дело в том, что аналитически они сводятся к решению уравнений третьей степени, которые не имеют решения в квадратных радикалах. Более подробно о неразрешимости классических задач с помощью циркуля и линейки будет рассказано в п. 89 учебника геометрии для 10—11 классов.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте свойства площади для простых фигур.
2. Докажите, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.
3. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.
4. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.
5. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.
6. Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
7. Какие фигуры называются равновеликими?
8. Сформулируйте условие равновеликости двух треугольников.
9. Какие фигуры называются равносоставленными?
10. Как относятся площади подобных фигур?
11. Выведите формулу площади круга.
12. По каким формулам вычисляются площади кругового сектора и кругового сегмента?
13. Какие геометрические фигуры можно увидеть на фотографиях (с. 197—205)? Приведите другие примеры геометрических фигур.

Задачи

Пункт 124

1. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе (рис. 310).

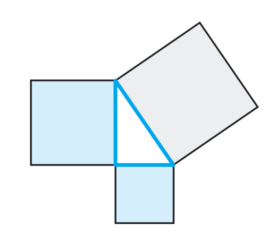


Рис. 310

2. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.
3. Найдите площадь квадрата S по его диагонали a.
4. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?
5. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?
6. Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?
7. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь 144 м^2?
8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2?

Пункт 125

9. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.
10. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет бо́льшую площадь? Объясните ответ.
11. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 30°.
12. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.
13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.
14. Найдите стороны ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2, а площадь ромба равна 12 см^2.

Пункт 126

15. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.
16. Решите предыдущую задачу для параллелограмма.
17. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?
18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a.
19. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведённая к стороне 4 см?
20. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т. е. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

21. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна a.

22. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

23. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.

24. Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 $см^2$?

25. У треугольника ABC сторона AC равна a, сторона BC равна b. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?

26. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен 70°.

27. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен 70°.

28. Найдите площадь треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам α и β.

29. Найдите площадь треугольника по трём сторонам:

1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80;

4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

30. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

31. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

32. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту треугольника, опущенную на боковую сторону.

33. Найдите высоты треугольника, у которого стороны равны 13 см, 14 см и 15 см.

34. Найдите высоту треугольника со сторонами $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83, проведённую к стороне $2\frac{1}{12}$.

35. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80;

наибольшую высоту треугольника со сторонами: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

Пункт 127

36. 1) Докажите, что диагонали параллелограмма разбивают его на четыре равновеликих треугольника.

2) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABO и CDO равновеликие.

Пункт 128

37. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.

38. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона равна 25 см. Найдите площадь трапеции.

39. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.

40. Докажите, что если диагонали четырёхугольника пересекаются, то площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

41. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.

Пункт 129

42. Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

43. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

44. Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведённая к основанию, 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

45. Найдите радиусы окружностей, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b и вписанной в него.

46. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

47. Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

48. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

49. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения периметра многоугольника на радиус окружности.

Пункт 130

50. Через середину высоты треугольника проведена перпендикулярная к ней прямая. В каком отношении она делит площадь треугольника?

51. Прямая, перпендикулярная высоте треугольника, делит его площадь пополам. Найдите расстояние от этой прямой до вершины треугольника, из которой проведена высота, если она равна h.

52. Периметры правильных n-угольников относятся как $a : b$. Как относятся их площади?

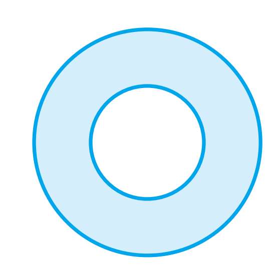


Рис. 311

Пункт 131

53. Найдите площадь круга, если длина окружности l.

54. Найдите площадь кругового кольца (рис. 311), заключённого между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b, $a > b$.

55. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в m раз?

56. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

57. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около треугольника.

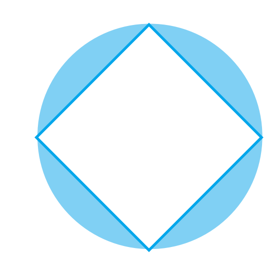
58. Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга, вписанного в него.

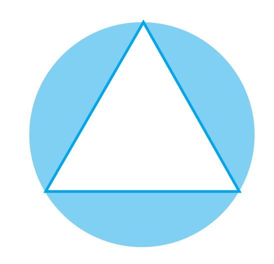
59. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) $40°$; 2) $90°$; 3) $150°$; 4) $240°$; 5) $300°$; 6) $330°$.

60. Дана окружность радиуса R. Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1) R; 2) l.

61. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

62. Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника. Радиус круга R (рис. 312).





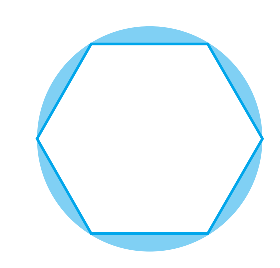


Рис. 312

§ 15 Элементы стереометрии

132 Аксиомы стереометрии

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии так же, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путём доказательства соответствующих теорем. Основные фигуры пространства — точки, прямые и плоскости. Система аксиом стереометрии состоит из аксиом планиметрии I—IX и трёх пространственных аксиом:

Аксиомы стереометрии

C_1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Приведём в качестве примера доказательства двух теорем из стереометрии с использованием аксиом стереометрии.

Теорема 15.1

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость.

Доказательство.

Пусть A, B, C — данные три точки (рис. 313). Проведём прямые AB и AC (аксиома I). Прямые AB и AC различны, так как точки A, B, C не лежат на одной прямой. Проведём через прямые AB и AC плоскость (аксиома C_3). Эта плоскость проходит через точки A, B, C, так как содержит прямые AB и AC. Теорема доказана.

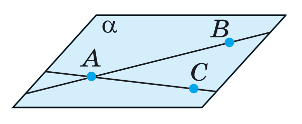


Рис. 313

Теорема 15.2

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.

Доказательство.

Пусть α — данная плоскость и *A*, *B* — точки прямой, принадлежащие плоскости α (рис. 314). Отметим точку *C*, не лежащую в плоскости α (аксиома $С_1$). Проведём через точки *A*, *B*, *C* плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой, содержащей точки *A* и *B*, а эта прямая единственная (аксиома I). Итак, прямая *AB* принадлежит плоскости α. Теорема доказана.

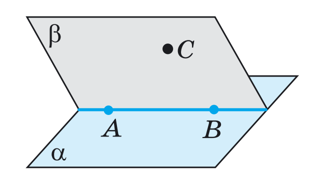


Рис. 314

Для возможности решения простейших задач стереометрии мы дадим определения основных понятий стереометрии и приведём основные теоремы (без доказательства).

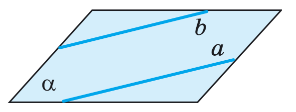


Рис. 315

133 Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 315). Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.
Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

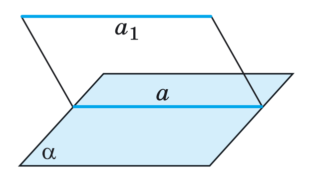


Рис. 316

Прямая и плоскость в пространстве называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 316).

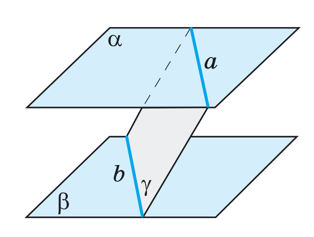


Рис. 317

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то прямые пересечения плоскостей параллельны (рис. 317). **Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести параллельную плоскость, и притом только одну.**

Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны (рис. 318).

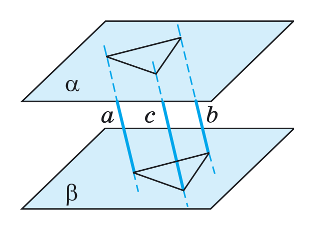


Рис. 318

Задачи

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.

3. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

4. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.

5. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если: 1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

6. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

7. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2:3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5:3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4:5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

8. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через точку A, тоже в вершинах параллелограмма.

9. Даны три параллельные плоскости α_1, α_2, α_3. Пусть X_1, X_2, X_3 — точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от прямой, т. е. одинаково для любых двух прямых.

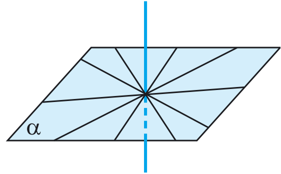


Рис. 319

134 Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

Прямые в пространстве называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Если прямые a и b перпендикулярны и a_1, b_1 — пересекающиеся прямые, параллельные прямым a и b, то они тоже перпендикулярны.

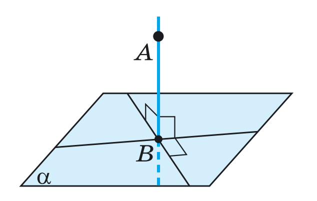


Рис. 320

Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку их пересечения (рис. 319).

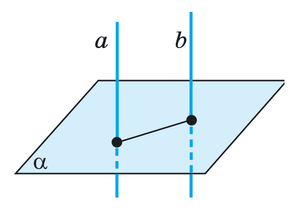


Рис. 321

Прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым в плоскости, проходящим через точку их пересечения (рис. 320).

Через каждую точку плоскости можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну. Все прямые, перпендикулярные данной плоскости, параллельны (рис. 321).

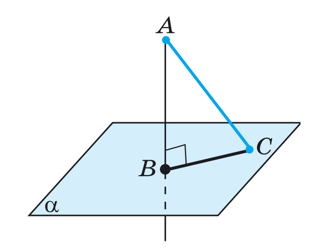


Рис. 322

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость (см. рис. 320).

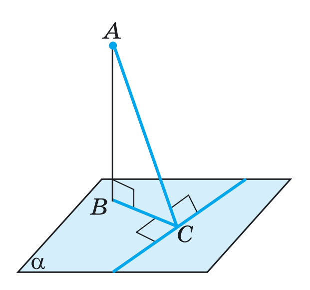


Рис. 323

Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, называется **проекцией наклонной** (рис. 322). На рисунке AB — перпендикуляр, AC — наклонная, BC — проекция наклонной. Сформируем теорему о трёх перпендикулярах.

Теорема 15.3

Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и наклонной. И обратно, **если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной** (рис. 323).

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает дан-

ные плоскости по перпендикулярным прямым (рис. 324).

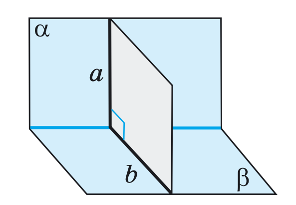


Рис. 324

Если прямая *a* перпендикулярна плоскости α, а плоскость β проходит через прямую *a*, то плоскости α и β перпендикулярны (рис. 325).

Рис. 325

Задачи

10. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если:
1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$;
4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.

11. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

12. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.

13. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

14. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удалённых на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого — 3,9 м. Найдите длину перекладины.

15. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

16. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

135 Многогранники

Двугранным углом называется геометрическая фигура, которая состоит из двух полуплоскостей с общей ограничивающей их прямой — ребром угла. За меру двугранного угла принимается мера плоского угла, который получается в пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру (рис. 326).

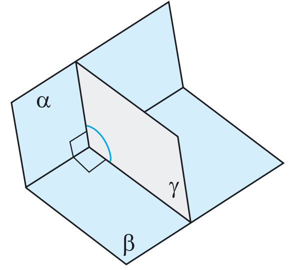


Рис. 326

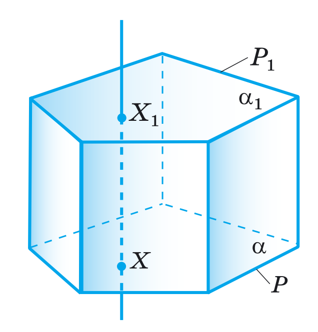


Рис. 327

Многогранным углом называется фигура, которая состоит из последовательно соединённых плоских углов с общей вершиной. Стороны плоских углов многогранного угла называются его **рёбрами**.

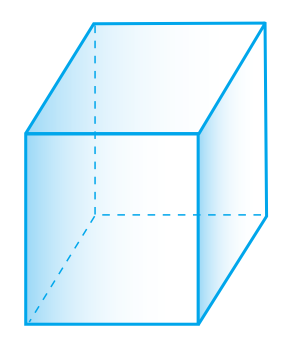
В стереометрии изучаются геометрические тела, ограниченные конечным числом плоских многоугольников, — **многогранники**. Простейшими среди них являются **призмы** и **пирамиды**. Дадим определения этих многогранников.

Призма. Пусть α и α_1 — две параллельные плоскости и P плоский многоугольник в плоскости α. Проведём через произвольную точку X многоугольника P прямую, перпендикулярную плоскости. Она будет перпендикулярна плоскости α_1 и пересечёт её в некоторой точке X_1. Геометрическое тело, образованное всеми отрезками XX_1, называется **прямой призмой** (рис. 327). Поверхность прямой призмы состоит из многоугольника P в плоскости α, равного ему многоугольника P_1 в плоскости α_1 — **оснований призмы**, и прямоугольников, плоскости которых перпендикулярны плоскостям оснований призмы α и α_1, а стороны, соединяющие вершины многоугольников P и P_1, равны. Они называются **боковыми рёбрами** призмы. **Высотой** призмы называется расстояние между плоскостями оснований.

Прямая призма называется **правильной**, если у неё основания — правильные многоугольники.

Сечения прямой призмы плоскостями, параллельными основаниям призмы, являются многоугольниками, равными основаниям призмы. Сечения прямой призмы плоскостями, перпендикулярными основаниям призмы, являются прямоугольниками. В частности, прямоугольниками являются диагональные сечения.

Прямая призма называется **параллелепипедом**, если у неё основания — параллелограммы (рис. 328). Если же основания призмы — прямоугольники, то она называется **прямоугольным параллелепипедом**. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники. Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются **линейными размерами** параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед, у которого все линейные размеры равны, называется **кубом**. Таким образом, у куба все рёбра равны, а грани — квадраты.


Рис. 328

Пирамида. Дадим определение пирамиды. Пусть P — плоский многоугольник в плоскости α и S — точка, не лежащая в плоскости α. Соединим произвольную точку X многоугольника P с точкой S.

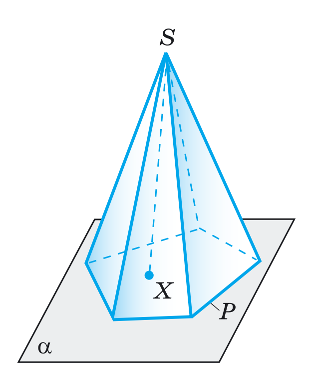


Рис. 329

Геометрическое тело, составленное из точек всех отрезков XS, называется **пирамидой** (рис. 329). Поверхность этого тела состоит из многоугольника P — **основания пирамиды** — и боковых граней, представляющих собой треугольники с общей вершиной S — **вершиной пирамиды**. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются **боковыми рёбрами**. **Высотой** пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, а также длина этого перпендикуляра. Пирамида называется **правильной**, если её основание есть правильный многоугольник, а основанием высоты пирамиды является центр этого многоугольника. Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (рис. 330). Но часто называют тетраэдром треугольную пирамиду, у которой все рёбра равны (правильный тетраэдр).

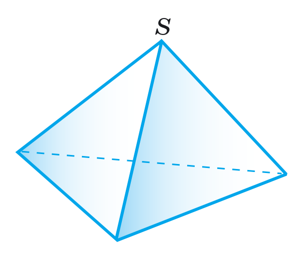


Рис. 330

Сечениями пирамиды плоскостями, параллельными основанию, являются многоугольники, подобные основаниям пирамиды. Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через вершины пирамиды, являются треугольниками.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, рассекает пирамиду на части (рис. 331). Та из них, которая содержит вершину пирамиды, представляет собой пирамиду, подобную исходной. Другая часть называется **усечённой пирамидой**. Поверхность усечённой пирамиды состоит из оснований — подобных многоугольников в параллельных плоскостях — и боковой поверхности, составленной из трапеций. Усечённая пирамида, которая получается из правильной, также называется правильной. Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями оснований.

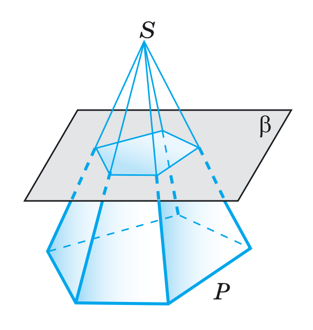


Рис. 331

В стереометрии вводится понятие объёма для геометрических тел. Сначала рассматриваются простые тела, тела, допускающие разбиение на конечное число треугольных пирамид. Объёмы таких тел определяются следующими требованиями: 1) равные тела имеют равные объёмы; 2) если тело представлено как объединение двух простых тел, то объём всего тела равен сумме объёмов его частей; 3) объём куба с линейными размерами, равными

единице, равен единице. Из этих свойств объёма простых тел получаются следующие формулы:

1. **Объём прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c: $V = abc$.**
2. **Объём любой призмы равен произведению площади основания на высоту призмы.**
3. **Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту пирамиды.**
4. **Объём усечённой пирамиды равен разности объёмов полной пирамиды и отсекаемой от неё подобной пирамиды.**
5. **Объёмы подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.**

Задачи

17. Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите: 1) отрезок AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α; 2) двугранный угол α, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.

18. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведённого через боковое ребро и меньшую высоту основания.

19. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.

20. В прямой треугольной призме все рёбра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.

21. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

22. У параллелепипеда три грани имеют площади 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

23. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите бóльшую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол $60°$.

24. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен $60°$.

25. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.

26. Диагонали трёх граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные размеры параллелепипеда.

27. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

28. Основание пирамиды — параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

29. У четырёхугольной усечённой пирамиды стороны одного основания равны 6 см, 7 см, 8 см, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

30. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2?

31. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

32. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 4 см. Стороны оснований равны 2 см и 8 см. Найдите площади диагональных сечений.

33. Три латунных куба с рёбрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?

34. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объём увеличится в 125 раз. Найдите ребро.

35. Измерения прямоугольного бруска 3 см, 4 см, 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится объём?

36. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объём.

37. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 м^2. Площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объём параллелепипеда.

38. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объём правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

39. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объём призмы.

40. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

41. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объём правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

42. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое равно b. Найдите объём пирамиды.

43. Найдите объём усечённой пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

44. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объём пирамиды?

136 Тела вращения

Тело вращения — это геометрическая фигура, которую описывает плоская фигура при вращении её около оси, лежащей в плоскости фигуры. Простейшими телами вращения являются **цилиндр**, **конус** и **шар** (рис. 332). Цилиндр описывает прямоугольник при вращении его около стороны как оси. Конус описывает прямоугольный треугольник при вращении его около катета как оси. Шар получается при вращении полукруга относительно диаметра.

Поверхность цилиндра состоит из равных кругов в параллельных плоскостях — **оснований цилиндра — и боковой поверхности**. Прямолинейные отрезки на боковой поверхности цилиндра параллельны оси цилиндра и называются **образующими** цилиндра. Все они параллельны и имеют длину, равную высоте цилиндра. Сечения цилиндра плоскостями, параллельными основаниям, являются кругами, равными кругам оснований. Сечения цилиндра плоскостями, параллельными оси, — прямоугольники.

Призма называется **вписанной** в цилиндр, если её основания вписаны в окружности оснований цилиндра. Призма называется **описанной** около цилиндра, если её основания описаны около оснований цилиндра. Радиусом цилиндра называется радиус круга в основании цилиндра.

Объём цилиндра находится из сравнения его с объёмом вписанной и описанной призм. При этом получается формула для объёма цилиндра:

$$V = \pi R^2 H,$$

где πR^2 — площадь основания цилиндра, а H — высота. Боковая поверхность цилиндра вычисляется по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где $2\pi R$ — длина окружности основания цилиндра, а H — высота.

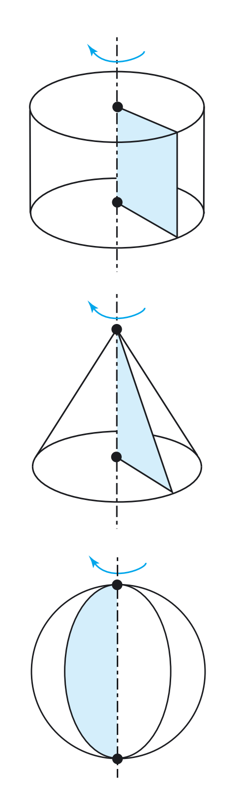


Рис. 332

Поверхность конуса состоит из круга в основании конуса и боковой поверхности. Прямолинейные отрезки на боковой поверхности конуса, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими конуса**. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг. Сечение плоскостью, проходящей через вершину, есть треугольник. **Высотой** конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание.

Плоскость, параллельная основанию конуса, рассекает конус на две части. Одна из них, содержащая вершину, есть конус, подобный исходному. Другая часть называется **усечённым конусом** (рис. 333).

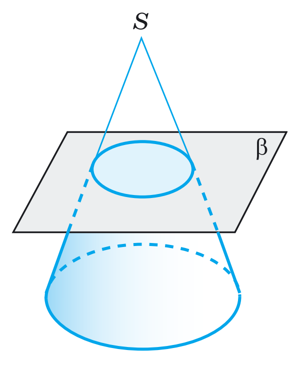


Рис. 333

Объём конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{8}\pi R^2 H,$$

где πR^2 — площадь основания конуса, а H —высота конуса. Площадь боковой поверхности конуса

$$S = \pi R l,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей конуса.

Объём усечённого конуса вычисляется как разность объёмов полного конуса и отсекаемой части. Аналогично площадь боковой поверхности усечённого конуса вычисляется как разность боковых поверхностей полного конуса и отсекаемой части.

Из определения шара как тела вращения, получаемого при вращении полукруга около диаметра как оси, следует, что все точки шара находятся на расстоянии, не большем радиуса, от центра. А точки поверхности шара — **сферы** — находятся на расстоянии, равном радиусу, от центра.

Сечение шара любой плоскостью есть круг. Его центром является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

При вращении полукруга около диаметра AB как оси полукруг описывает шар радиуса R, равный радиусу полукруга (рис. 334). При этом плоский угол α описывает **шаровой сектор**, а полусегмент круга ADC описывает **шаровой сегмент** высотой AD. Дуга полукруга AC описывает **сферический сегмент**.

Для определения площадей и объёмов используются следующие формулы.

Площадь сферы радиуса R: $S = 4\pi R^2$.
Площадь сферического сегмента радиуса R и высоты H: $S = 2\pi RH$.
Объём шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объём шарового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$,

где H — высота соответствующего сферического сегмента.

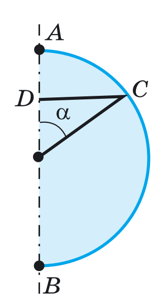


Рис. 334

Задачи

45. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

46. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведённого параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от неё.

47. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.

48. Радиус основания конуса R. Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

49. Конус пересечён плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

50. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

51. Радиусы оснований усечённого конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

52. Радиусы оснований усечённого конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.

53. Шар, радиус которого 41 дм, пересечён плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

54. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга? (Большим кругом называется сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.)

55. Шар радиуса R вписан в усечённый конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усечённого конуса.

56. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объём увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объём увеличился в n раз?

57. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объёмов цилиндров.

58. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объём конуса.

59. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причём цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.

60. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объём полученного тела вращения.

61. Радиусы оснований усечённого конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом $45°$. Найдите объём.

62. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объём V?

63. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. Каковы объёмы полученных частей?

64. Чему равен объём шарового сектора, если радиус окружности его основания 60 см, а радиус шара 75 см?

65. Круговой сектор с углом $30°$ и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объём полученного тела.

66. Поверхности двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объёмы?

67. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения M. Чему равна полная поверхность цилиндра?

68. Конусообразная палатка высотой 3,5 м с диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

Список рекомендуемой литературы

1. *Вейль Г.* Симметрия / Пер. с англ. Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова; под ред. Б. А. Розенфельда. — М.: Наука, 1968 или на сайте http://gotourl.ru/11388
2. *Волошинов А. В.* Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000
3. *Глейзер Г. И.* История математики в школе / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1964 или на сайте http://gotourl.ru/11388
4. *Иванов С. Г., Рыжик В. И.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2012
5. История математики. В 3 т. / Под ред. А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970, 1970, 1972 или на сайте http://gotourl.ru/11388
6. *Каган В. Ф.* Лобачевский / В. Ф. Каган. — 2-е изд., доп. — М.—Л.: изд-во АН СССР, 1948 или на сайте http://gotourl.ru/11388
7. *Киселёв А. П.* Элементарная геометрия / А. П. Киселёв. — М.: Типография Рябушинского, 1914 или на сайте http://gotourl.ru/11388
8. *Левитин К. Е.* Геометрическая рапсодия / К. Е. Левитин. — М.: Камерон, 2004 или на сайте http://gotourl.ru/11388
9. Начала Евклида. Книги I—VI. / Пер. с греч. и ком. Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.—Л.: ГТТИ, 1948 или на сайте http://gotourl.ru/11388
10. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.—Л.: ГТТИ, 1950 или на сайте http://gotourl.ru/11388
11. *Перельман Я. И.* Новый задачник по геометрии. 4-е изд. (Серия «Пособия для трудовой школы») / Я. И. Перельман. — М.—Л.: гос. изд-во, 1925 или на сайте http://gotourl.ru/11388
12. *Петров В. А.* Математика 5—11 кл. Прикладные задачи / В. А. Петров. — М.: Дрофа, 2010
13. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. (Вып. 17 серии «Библиотечка квант») / И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1982 или на сайте http://gotourl.ru/11388
14. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Глав. ред. М. Д. Аксёнова. — М.: Аванта+, 2003
15. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 4, 5 (геометрия) / Под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. — М.: Физматгиз, 1963, Наука, 1966 или на сайте http://gotourl.ru/11388

Интернет-ресурсы

http://gotourl.ru/8140
http://gotourl.ru/8134
http://gotourl.ru/13803

Ответы и указания к задачам

§ 1. **4.** Через две точки можно провести только одну прямую. **7.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **10.** Не принадлежит. **11.** Не может. **12.** Не могут. **13.** Не могут. **14.** 0,5 м или 5,9 м. **15.** 1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м; 2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м; 3) $AC = BC = 7{,}5$ м; 4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м. **18.** 1), 4), 6) Пересекает; 2), 3), 5) не пересекает. **19.** 6 отрезков. **24.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **25.** 2), 3) Не может. **26.** 1) $\angle(ac) = 45°$, $\angle(bc) = 15°$; 2) $\angle(ac) = 40°$, $\angle(bc) = 20°$; 3) $\angle(ac) = \angle(bc) = 30°$; 4) $\angle(ac) = 24°$, $\angle(bc) = 36°$. **29.** Не существует. **31.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **33.** 11 см. **34.** 100°. **36.** $PQ = 5$ см, $QR = 6$ см, $PR = 7$ см. **37.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **39.** В $\triangle ABC$ $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. **40.** Существует. **42.** Нельзя. **43.** Не может. **49.** 2) Указание. Соедините отрезком точки A и C и воспользуйтесь утверждением задачи 49, 1). **51.** 1) См. решение задачи 30 в тексте; 2) проведите через точку A прямую, отличную от a.

§ 2. **1.** 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Не могут; 3) могут. **4.** 1) 105° и 75°; 2) 110° и 70°; 3) 45° и 135°; 4) 90° и 90°. **5.** 180°, 90°, 120°. **6.** 1) 72° и 108°; 2) 54° и 126°; 3) 55° и 125°; 4) 88° и 92°. **7.** 150°, 150°, 30°. **8.** 130°. **10.** 144° и 36°. **11.** 65° и 115°. **12.** Все углы прямые. **15.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **16.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **18.** Указание. Стороны угла лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, частью которой является данный луч. **19.** 90°. **20.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 19 и теоремой 2.3. **21.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **22.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 1.1. **23.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **24.** $\angle(a_1b) = 120°$, $\angle(a_1c) = 150°$, $\angle(bc) = 30°$. **25.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°; 4) 130°. **26.** 1) Не проходит; 2) не может.

§ 3. **8.** 0,3 м. **9.** 3,5 м. **10.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **21.** Указание. Воспользуйтесь свойством медианы в равнобедренном треугольнике. **24.** 3) Указание. Продлите биссектрису BD на её длину. **26.** 15 м. **29.** Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 28. **38.** Указание. Продлите медианы на их длину. **39.** Указание. Продлите медианы на их длину.

§ 4. **5.** Углы AB_1C_1 и AC_1B_1 и углы BB_1C_1 и CC_1B_1 — внутренние односторонние, а углы AB_1C_1 и CC_1B_1 и углы BB_1C_1 и AC_1B_1 — внутренние накрест лежащие. **7.** Углы BCA и DBC — внутренние накрест лежащие, углы CAB и DBA — внутренние одно-

сторонние. **14.** 1) 105° и 75°; 2) 75°. **15.** Три угла по 72° каждый и четыре угла по 108° каждый. **16.** Не может. **18.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **19.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **20.** Не может. **21.** Не может. **22.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **23.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **24.** 40°, 40°. **25.** 70° и 40° или 55° и 55°. **27.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) два угла равны $120° - \frac{2}{8}\alpha$ и один $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **29.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **31.** 90°. **32.** 110°, 35°, 35°. **33.** 60°, 30° и 90°. **34.** 110°. **36.** Точка *A*. **38.** 60°. **39.** $\angle D = \frac{\angle A}{2}$, $\angle E = \frac{\angle C}{2}$, $\angle DBE = \angle B \frac{\angle A + \angle C}{2}$. **40.** 140°, 10°. **41.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **42.** Углы $\triangle ABD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$; углы $\triangle CBD$: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **44.** 90°, 45°, 45°. **45.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **46.** 150°. **47.** 90°.

§ 5. **1.** Указание. Отложите на луче отрезок, равный радиусу. **2.** Указание. См. задачу 1. **5.** 1) 60°; 2) 120°. **7.** Не может. **9.** 30°. **10.** 60° и 120°. **11.** 70 см, 10 см. **12.** Не могут. **13.** 1) Не могут; 2) не могут. **14.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. **15.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. 3) Указание. Докажите сначала, что общая точка данных окружностей лежит на прямой, проходящей через их центры. **16.** 2) Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного. **18.** Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 16, 1). **27.** Указание. Начните с построения равностороннего треугольника. **31.** Указание. В искомом треугольнике продлите медиану на её длину. **36.** Указание. См. задачу 35. **37.** Указание. См. задачу 35. **38.** Указание. См. задачу 35. **39.** Указание. Начните с построения высоты. **41.** Указание. См. задачу 50 § 4. **42.** Указание. См. задачу 41. **48.** Указание. Постройте сначала треугольник, у которого одна сторона равна заданной стороне искомого треугольника, другая сторона — сумме двух других его сторон и угол между ними равен заданному углу. **49.** Указание. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче с той разницей, что вместо суммы двух сторон искомого треугольника надо взять их разность. **50.** См. указание к задаче 48. **52.** Указание. Сведите решение задачи к предыдущей, построив вспомогательную окружность, концентричную одной из данных, с радиусом, равным сумме или разности радиусов данных окружностей.

§ 6. **3.** Три. **4.** 10 м. **6.** 3 см и 4 см. **7.** $BC = AD = 4{,}8$ м. **8.** $AD = 15$ см, $CD = 10$ см. **9.** $\angle B = \angle D = 150°$, $\angle C = 30°$. **10.** 3 см. **11.** 40°, 140°, 140°. **12.** 115° и 65°. **13.** Не могут. **14.** 60°, 60°, 120°, 120°. **15.** 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. **16.** 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. **19.** $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. У к а з а н и е. Докажите, что $\triangle ABE$ равнобедренный с основанием AE. **20.** 0,6 м и 0,8 м. **21.** $AB = BD = 1{,}1$ м, $AD = 0{,}8$ м. **28.** 60 см. **29.** 10 см и 18 см. **30.** 12 см, 20 см. **31.** 12 см. **32.** 10 см и 25 см или 7,5 см и 18,75 см. **35.** 80° и 100°. **37.** 60° и 120°. **41.** 4 м. **43.** 2 м. **44.** 2 м. **45.** 4 м, 8 м. **46.** 1 м. **47.** 10 см. **50.** 4 см, 5 см, 6 см. **51.** 6 см. **52.** 6 см, 5 см, 5 см. **56.** 5 м, 6 м. **57.** $a + b$. **59.** 3 м, 4 м. **61.** 70° и 110°. **62.** 1,7 м. **63.** 24 см, 36 см. **64.** 60° и 120°. **65.** 15 м. **66.** 3 см. **67.** 4 м, 6 м. **68.** 2,2 м. **69.** 9 см и 5 см. **70.** a. **71.** У к а з а н и е. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны боковым сторонам трапеции, а третья — разности оснований. **72.** У к а з а н и е. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а третья — сумме её оснований. **73.** У к а з а н и е. Постройте сначала отрезок $x = \frac{ab}{d}$, воспользовавшись решением задачи 6.1. **75.** Шесть. **76.** Восемь. **77.** Могут, если треугольник прямоугольный.

§ 7. **2.** 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$. **3.** 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11} \approx 3{,}3$. **4.** 5 м или $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **5.** Не могут. **6.** 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. **7.** 109 см. **8.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **9.** Нельзя. **10.** $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **12.** Могут. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.** У к а з а н и е. Постройте сначала отрезки $c = \frac{a+b}{2}$ и $d = \frac{|a-b|}{2}$. Тогда искомый отрезок $x = \sqrt{c^2 - d^2}$. **16.** $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. **18.** 90°. **20.** У к а з а н и е. Соедините одну из точек с вершиной треугольника отрезком и воспользуйтесь результатом задачи 19. **22.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 21. **26.** Не может. **27.** 2 м. **28.** У к а з а н и е. Продлите медиану на её длину. **31.** 2) У к а з а н и е. Сведите решение этой задачи к предыдущей согласно рисунку 165, *б*. **32.** Не могут. **34.** $R - d$, $R + d$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **35.** $d + R$, $d - R$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **36.** Не могут. **37.** Не могут. **38.** У к а з а н и е. Сравни-

те расстояние между центрами окружностей с их радиусами. **39.** Не могут. **41.** Указание. Данные числа удовлетворяют условиям задачи 40. **42.** 1), 3), 4) Нельзя; 2) можно. **43.** Воспользуйтесь результатом задачи 41. **44.** 10 см, 6 см. **45.** $90° — \alpha$, $a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$. **46.** $90° - \alpha$, $\frac{a}{\text{tg}\,\alpha}$, $\frac{a}{\sin \alpha}$. **49.** 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16° = 0{,}9613$; 2) $\sin 24°36' = 0{,}4163$, $\cos 24°36' = 0{,}9092$; 3) $\sin 70°32' = 0{,}9428$, $\cos 70°32' = 0{,}3333$; 4) $\sin 88°49' = 0{,}9998$, $\cos 88°49' = 0{,}0206$. **50.** 1) $x = 1°$; 2) $x = 30°6'$; 3) $x = 47°3'$; 4) $x = 86°9'$. **51.** 1) $\text{tg}\, 10° = 0{,}1763$; 2) $\text{tg}\, 40°40' = 0{,}8591$; 3) $\text{tg}\, 50°30' = 1{,}213$; 4) $\text{tg}\, 70°15' = 2{,}785$. **52.** 1) $x = 17°53'$; 2) $x = 38°7'$; 3) $x = 80°46'$; 4) $x = 83°50'$. **53.** 31°25′; 31°25′; 117°10′; 23,8 м. **54.** 34°10′ и 55°50′. **55.** 51°. **56.** 116°16′ и 63°44′. **57.** 29°52′ и 150°8′. **58.** 12 м, 45°14′. **59.** 60°16′. **60.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **61.** 1) а) 5; 36°52′; 53°8′; б) 41; 12°41′; 77°19′; в) 29; 43°36′; 46°24′; г) 61; 10°23′; 79°37′; 2) а) 12; 22°37′; 67°23′; б) 24; 16°16′; 73°44′; в) 15; 28°4′; 61°56′; г) 13; 81°12′; 8°48′; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40′; 3,08; 2,55; в) 19°24′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78; 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **62.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1 + \text{ctg}^6\alpha$. **63.** 1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{12}{5}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{5}{12}$; 2) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{8}{15}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{5}{6}$; 3) $\sin \alpha = 0{,}8$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{4}{3}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{3}{4}$. **64.** 1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{3}{4}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{4}{3}$; 2) $\cos \alpha = \frac{9}{41}$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{40}{9}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{9}{40}$; 3) $\cos \alpha = 0{,}6$, $\text{tg}\, \alpha = \frac{4}{3}$, $\text{ctg}\, \alpha = \frac{3}{4}$. **66.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **67.** $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **68.** 29 см или $\sqrt{882}$ см $\approx$ 29,7 см. **69.** $(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}732$ м; $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}517$ м. **70.** 60° и 120°. **71.** 60°, 60°, 120°, 120°. **72.** 1), 2), 3), 4), 5), 6) β. **73.** *BC*. **74.** $\angle A$.

§ 8. **3.** 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** Прямая, параллельная оси y. **8.** Две прямые $x = 3\frac{1}{3}$ и $x = -3\frac{1}{3}$. **10.** Положительную. **11.** 4; 3. **12.** 1) (3; 2); 2) (−1; 3); 3) (1; 1). **13.** 1) (−2; 3); 2) (3; −5); 3) (−4; 4). **16.** (0; 1), (−2; 0), (−2; 1). **17.** $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 5$. **18.** Точка *B*. **20.** (3; 3) и (15; 15). **23.** (3; 4), (−4; 3), (0; 5). **24.** (5; 12) и (5; −12); (5; −12) и (−5; −12). **25.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **26.** $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. **27.** (−2; 0) или

(4; 0). **28.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **29.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **31.** (0; 1) и $(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$. **32.** (7; 0) и (1; 0). **36.** 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$. **37.** $x=0$, $y=0$, $x+2y-4=0$. **38.** $a=b=\frac{1}{3}$. **39.** 1) (−3; 0) и $(0; -\frac{3}{2})$; 2) (4; 0) и (0; 3); 3) (−2; 0) и (0; 3); 4) (2,5; 0) и (0; −5). **40.** 1) (1; −2); 2) (2; 4); 3) (0,5; −2). **41.** У к а з а н и е. Найдите точку пересечения двух прямых и проверьте, лежит ли она на третьей прямой. **42.** $(2; \frac{5}{3})$. **43.** 1) и 6), 2) и 3), 4) и 5). **45.** $x=2$. **46.** $y=3$. **47.** $3x-2y=0$. **48.** 1) $k=-\frac{1}{2}$; 2) $k=-\frac{3}{4}$; 3) $k=\frac{3}{2}$; 4) $k=2$. **49.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°. **50.** 2) (0; 1) и (−1; 0); 3) (0; 1) и $(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$; 4) (0; 1) и $\left(-\frac{2k}{k^2+1}; -\frac{1-k^2}{k^2+1}\right)$. **51.** Прямая касается окружности при $c=\pm\sqrt{2}$, пересекает её при $|c|<\sqrt{2}$ и не пересекает при $|c|>\sqrt{2}$. У к а з а н и е. Прямая, касающаяся окружности, имеет с ней единственную общую точку, т. е. корни соответствующего квадратного уравнения должны совпадать. **52.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\text{tg}\,120°=-\sqrt{3}$, $\text{ctg}\,120°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,135°=-1$, $\text{ctg}\,135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\,150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{ctg}\,150°=-\sqrt{3}$. **53.** 1) sin 160° = 0,3420, 2) cos 140° = −0,7660; 3) tg 130° = = −1,1920; 4) ctg 110° = −0,3640. **54.** 1) sin 40° = 0,3420, cos 40° = 0,7760, tg 40° = 0,8391, ctg 40° = 1,192; 2) sin 14°36′ = = 0,2521, cos 14°36′ = 0,9677, tg 14°36′ = 0,2605, ctg 14°36′ = = 3,862; 3) sin 70°20′ = 0,9417, cos 70°20′ = 0,3365, tg 70°20′ = = 2,798, ctg 70°20′ = 0,3574; 4) sin 30°16′ = 0,5040, cos 30°16′ = = 0,8637, tg 30°16′ = 0,5836; 5) sin 130° = 0,7660, cos 130° = = −0,6428, tg 130° = −1,192, ctg 130° = −0,8391; 6) sin 150°30′ = = 0,4924, cos 150°30′ = −0,8704, tg 150°30′ = −0,5658, ctg 150°30′ = −1,767. **55.** $\alpha_1\approx 11°32'$ или $168°28'$, $\alpha_2\approx 134°26'$, $\alpha_3\approx 158°12'$, $\alpha_4\approx 68°12'$. **56.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\text{tg}\,\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\,\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\text{tg}\,\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\text{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$, $\text{ctg}\,\alpha=\frac{4}{3}$;

2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ или $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1$. **58.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. **61.** Указание. Рассмотрите сначала случай, когда оба угла α и β острые. **62.** См. указание к задаче 61.

§ 9. **2.** В квадрат. **4.** Указание. Постройте последовательно вершины C, D и E равносторонних треугольников ABC, ACD, ADE. Точка E — искомая. **7.** Не может. **9.** Указание. Вершины данного четырёхугольника переходят при симметрии относительно его центра в вершины. **10.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно данной точки. **11.** 1) Отрезок; 2) угол; 3) треугольник. **14.** 1) (−3; −4); 2) (3; 4); 3) (3; −4). **19.** Три. **24.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно прямой b. **28.** (1; −1), (2; −1), (1; 1). **29.** 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. **31.** 1) Не существует; 2) существует. **34.** Одинаково направленные лучи: AB и DC, AD и BC, CD и BA, DA и CB. Противоположно направленные лучи: AB и CD, BC и DA, DC и BA, AD и CB. **35.** В центре параллелограмма. **36.** В точке пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника. **37.** Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно линии канала. **38.** Указание. Отразите точку A симметрично относительно стороны угла m_1, а точку B относительно стороны угла m_2. **40.** Указание. Расстояние между проекциями данных пунктов на линию железной дороги может быть больше или меньше длины платформы. **41.** Указание. Поверните треугольник ACK, где K — точка нахождения комбината, на угол 60° вокруг точки A в сторону полуплоскости относительно прямой AC, не содержащей точки B.

§ 10. **1.** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ одинаково направлены, $\overline{BA}$ и каждый из векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ противоположно направлены. **4.** (2; 4), (−1; 2) и $(c_1; c_2)$. **5.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **8.** 1) $\bar{c}$ (−3; 4), $|\bar{c}| = 5$; 2) $\bar{c}$ (6; 8), $|\bar{c}| = 10$. **10.** 1) $\bar{c}$ (5; −12), $|\bar{c}| = 13$; 2) $\bar{c}$ (−6; 8), $|\bar{c}| = 10$. **12.** $\overline{AB} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{b} - \bar{a}$. **14.** 2) Указание. Постройте $\triangle ABC$, у которого $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Тогда $\overline{AC} = \bar{a} + \bar{b}$. **15.** $\frac{P}{\sqrt{3}}$. **19.** $\bar{c}\,(-6; -8)$, $|\bar{c}| = 10$. **20.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. **23.** $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CB} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})$,

$\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b})$. **25.** $\overline{a}$ и $\overline{c}$, $\overline{b}$ и $\overline{d}$. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ одинаково направлены, а $\overline{b}$ и $\overline{d}$ противоположно направлены. **26.** $m = 2$. **27.** $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **28.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 10.3. **29.** 90°. **30.** $\sqrt{3}$. Указание. $|\overline{a}+\overline{b}|^2 = (\overline{a}+\overline{b})^2$. **31.** 30°. **32.** $\cos A = 0{,}6$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0{,}8$. **33.** $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. **35.** $m = -\frac{8}{3}$. **36.** $\lambda = -1$. **39.** $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. **40.** Указание. Воспользуйтесь задачей 38. **45.** Единичные векторы $\overline{a}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$, векторы $\overline{a}$ и $\overline{d}$ коллинеарны. **46.** $\overline{e}$ (0,6; 0,8). **47.** 2, −3. **48.** 1) $OX = \frac{\mu a + \lambda b}{\mu + \lambda}$.

§ 11. **5.** Треугольник. **6.** $\angle A = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ м. **8.** Указание. Постройте сначала какую-нибудь окружность, касающуюся сторон угла, и воспользуйтесь гомотетией относительно вершины угла. **9.** Указание. Воспользуйтесь гомотетией относительно одной из вершин треугольника. **11.** 13,6 см. **12.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **13.** $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. **16.** $\frac{ab}{a+b}$. **17.** $\frac{m}{n}$. **18.** 4 см. **19.** $\frac{27}{28}$. **20.** 1) 14 см; 2) 6 дм. **22.** $m : n$. **23.** $n : m$. **24.** $AC = 18$ м. Указание. Треугольники ACD и CBA подобны. **25.** $m : n$. **26.** 15 см; 18 см. **27.** 4,5 см. **29.** $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. **30.** $A_1C_1 = 1{,}2$ м, $AC = 3$ м. **32.** $\angle D = 180° - 2\angle A$, $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$. **34.** Подобны. **35.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **37.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **38.** 6,5 м, 5,5 м. **39.** 1) Подобны; 2) не подобны. **40.** 15 см, 20 см, 25 см. **41.** 21 см. **43.** $m^2 : n^2$. **44.** ≈ 42 м. **45.** $\frac{bc}{b+c}$. **46.** Указание. Проведите через точку B прямую, параллельную прямой DC. **47.** Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей. **48.** $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}618$. **49.** 1) 300° и 60°; 2) 230° и 130°; 3) 190° и 170°. **50.** 5 см. **51.** 30° или 150°. **54.** Указание. См. задачу 52. **55.** α или $180° - \alpha$. **56.** 50°. **60.** Указание. Воспользуйтесь двумя предыдущими задачами. **63.** ≈ 225,8 км. Указание. См. задачу 62. **64.** ≈ 82,7 км. **65.** 30° и 90°. **66.** 60° и 120°. **67.** 54° и 126°. **68.** 130° и 230°. **69.** Указание. Искомое геометрическое место точек является дугой окружности с концами в точках A и B.

§ 12. **1.** $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{35}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\sqrt{13}$ м или $\sqrt{109}$ м. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm 2cd\cos\alpha}$. **5.** $\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$. **6.** 2,25 м, 3,75 м. **8.** $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $2\sqrt{6}$ м, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ м. **9.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ м, $2\sqrt{7}$ м, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ м. **10.** $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ м, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ м, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ м. **11.** Сторона AB увеличивается. **12.** Не может. **14.** $\frac{35}{2\sqrt{6}}$. **15.** $AB=\frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **18.** Сторона AB наибольшая, сторона BC наименьшая. **19.** Угол B наибольший, угол C наименьший. **20.** Боковая сторона больше. **24.** У к а з а н и е. Продлите медиану CD за точку D на её длину. **25.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь свойством перпендикуляра и наклонных, проведённых к прямой из одной точки, и утверждением предыдущей задачи.

26.	1) $\alpha = 105°$,	$b \approx 2,59$,	$c \approx 3,66$;
	2) $\gamma = 45°$,	$b \approx 17,9$,	$c \approx 14,6$;
	3) $\alpha = 20°$,	$b \approx 65,8$,	$c \approx 88,6$;
	4) $\gamma = 119°$,	$a \approx 16,7$,	$c \approx 24,8$;
	5) $\gamma = 68°$,	$a \approx 13,6$,	$b \approx 11,2$.
27.	1) $\alpha \approx 79°$,	$\beta \approx 41°$,	$c \approx 10,6$;
	2) $\alpha \approx 11°$,	$\beta \approx 39°$,	$c \approx 28$;
	3) $\beta \approx 27°$,	$\gamma \approx 58°$,	$a \approx 19,9$;
	4) $\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 15°$,	$a \approx 22,9$;
	5) $\alpha \approx 16°$,	$\gamma \approx 12°$,	$b \approx 53,4$;
	6) $\alpha \approx 130°$,	$\gamma \approx 35°$,	$b \approx 8,09$.
28.	1) $c \approx 8,69$,	$\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 39°$;
	2) $c \approx 19,6$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 29°$;
	3) $c \approx 22,3$,	$\beta \approx 6°$,	$\gamma \approx 10°$;
	4) решения не имеет;		
	5) $c \approx 11,4$,	$\alpha \approx 42°$,	$\gamma \approx 108°$
	или $c \approx 2,49$,	$\beta \approx 138°$,	$\gamma \approx 12°$.
29.	1) $\alpha \approx 29°$,	$\beta \approx 47°$,	$\gamma \approx 104°$;
	2) $\alpha \approx 54°$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 113°$;
	3) $\alpha \approx 34°$,	$\beta \approx 44°$,	$\gamma \approx 102°$;
	4) $\alpha \approx 39°$,	$\beta \approx 93°$,	$\gamma \approx 48°$;
	5) $\alpha \approx 15°$,	$\beta \approx 11°$,	$\gamma \approx 154°$;
	6) $\alpha \approx 136°$,	$\beta \approx 15°$,	$\gamma \approx 29°$.

§ 13. **2.** $R_1 + R_2 + d$, $R_1 - R_2 - d$. **6.** Не может. **8.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **12.** 1) 8; 2) 12. **13.** 1) 10 сторон;

2) 15 сторон. **14.** Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. **15.** Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. **18.** Указание. Выразите оба радиуса через сторону треугольника. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Найдите радиус окружности. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21.** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24.** Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов. **25.** Указание. Сначала с помощью задачи 29 § 11 найдите сторону 10-угольника, а затем по теореме косинусов — сторону пятиугольника. $a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **28.** $b = \frac{2aR}{\sqrt{2R^2 - a^2}}$. **29.** $\frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$. **30.** Указание. Впишите сначала правильный шестиугольник. **32.** Да, вписанная в окружность трапеция является равнобокой. **33.** 26 дм. **35.** $\frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$. **36.** $\frac{R_1 r_2}{r_1}$. **37.** $a : b$. **38.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **39.** 6,28 мм. **40.** $\approx$ 3,06. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 23. **41.** $\approx$ 3,11. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 24. **42.** $\approx$6366,2 км. **43** $\approx$6,3 см. **44.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. **45.** 1) $R(3 + 2\sqrt{3})$; 2) $R(1 + \sqrt{2})$; 3) R. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. **46.** $\approx$ 351,9 м/мин. **47.** 1) $\frac{\pi}{6}$ см; 2) $\frac{\pi}{4}$ см; 3) $\frac{2\pi}{3}$ см; 4) $\frac{3\pi}{2}$ см. **48.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **49.** 31″. **50.** 1) $\approx$ 0,79 м; 2) $\approx$ 0,52 м; 3) $\approx$ 2,09 м; 4) $\approx$ 0,80 м; 5) $\approx$ 1,06 м; 6) $\approx$ 2,63 м. **51.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Указание. По хорде и соответствующему центральному углу найдите радиус окружности. **52.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}l}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}l}{2\pi}$. Указание. Найдите сначала радиус окружности. **53.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **55.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 22,5°; 4) 150°; 5) 70°; 6) 240°.

§ 14. **1.** Указание. Примените теорему Пифагора. **2.** $\approx$ 180 м.

3. $S=\frac{a^2}{2}$. **4.** В 2 раза. **5.** Площадь увеличится в 9 раз. **6.** В 5 раз. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см². **12.** 202,8 см². **14.** $\sqrt{15}$ см. **17.** 4800 м². **18.** $\frac{a^2}{4}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.** $\frac{3R\sqrt{3}}{4}$. **23.** 600 см². **24.** 55 см, 48 см. **25.** $\angle C = 90°$. **26.** 0,47 м². **27.** 5,64 м². **28.** $\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **29.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **31.** $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **31.** 1) 24 см; 2) 24 см. **32.** 13,44 см. **33.** 12 см; 11,2 см; $\frac{168}{13}$ см. **34.** 1,344. **35.** 1) 4; 2) 7,2; 3) 4,8; 4) $\frac{5040}{169}$. **37.** 480 см². **38.** 408 см². **39.** 540 м². **43.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r = 4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r = 1,5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{4\sqrt{6}}$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **44.** 4,5 см. **45.** $R=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **46.** $R=\frac{169}{24}$ см, $r=\frac{10}{3}$ см. **47.** Указание. Воспользуйтесь свойством касательных, проведённых из одной точки к окружности. **48.** $R = 29$ см, $r = 12$ см. **50.** 1 : 4. **51.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **52.** $a^2 : b^2$. **53.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **54.** 1) 20π см²; 2) 12π м²; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **55.** 1) В 4 раза; 2) в 25 раз; 3) в m^2 раз. **56.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **57.** $\frac{1}{4}$. **58.** 2. **59.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **60.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. **61.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **62.** 1) $(\pi - 2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 15. **2.** Можно. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** Нельзя. **7.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **9.** Указание. Сравните отношение отрезков двух произвольных прямых. **10.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **13.** 2,6 м. **14.** $\approx 3,9$ м. **15.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **16.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **17.** 1) $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha+c^2}$; 2) 60°. **18.** 144 см². **19.** 22 см.

20. 2 м. **21.** 1) $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab + 2a^2$; 3) $6ab + 3a^2\sqrt{3}$. **22.** 12 $м^2$. **23.** 10 $см^2$. **24.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **25.** 1464 $см^2$. **26.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **27.** 12 см. **28.** 5 см, 6 см. **29.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **30.** 11 м. **31.** 1) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $20\sqrt{2}$. **33.** 6 см. **34.** 25 см. **35.** Вдвое. **36.** 60 $см^3$. **37.** 3 $м^3$. **38.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **39.** 3 $см^3$. **40.** 35 200 $м^3$. **41.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **42.** $\frac{1}{6}b^3$. **43.** $\frac{h}{3}(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2)$. **44.** 1 : 7. **45.** 5 м. **46.** 36 $см^2$. **47.** 5 м. **48.** R^2. **49.** $\frac{\pi R^2 d^2}{H^2}$. **50.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **51.** 5 м. **52.** 30 $дм^2$. **53.** 16π $м^2$. **54.** 3 : 4. **55.** $R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **56.** В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. **57.** 4 : 1. **58.** 9 $м^3$. Указание. Высота конуса равна радиусу его основания. **59.** ≈ 1,6 т. **60.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **61.** $\frac{\pi^2}{3}(R^3-r^3)$. **62.** $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. **63.** 45π см, 243π $см^3$. **64.** $112{,}5\pi$ $дм^3$ или 450π $дм^3$. **65.** $\frac{1}{3}\pi R^2(2-\sqrt{3})$. Указание. Тело является шаровым сектором. **66.** $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$. **67.** $\pi m + 2Q$. Указание. По площади основания найдите его радиус. **68.** ≈ 25,3 $м^2$.

Предметный указатель

Т

У

Ф, Х

Ч, Ц

Содержание

7 КЛАСС